Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 3: toryczne rozmaitości afiniczne.

Rozmaitości są zdefinowane nad ciałem algebraicznie domkniętym k charakterystyki 0, może być $k = \mathbb{C}$. W tej serii zadań termin rozmaitość toryczna może dotyczyć rozmaitości, która nie jest normalna.

1. Niech X będzie afiniczną rozmaitością toryczną z pierścieniem funkcji regularnych $k[S]$, gdzie $S \subset M$ jest przemienną półgrupą z jednością (monoidem) zawartym w kracie M. Jak zwykle przyjmujemy, że torus $T_M = Hom(M, \mathbb{C}^*)$ działa wiernie na X czyli, równoważnie, S rozpina M. Pokaż, że punkty V są w bijekcji z homomorfizmami półgrup $S \longrightarrow k^* \cup \{0\}$, gdzie półgrupa po prawej stronie jest multiplikatywna ale bez jedności.

2. Afiniczna rozmaitość toryczna X podana jest poniżej za pomocą jej pierścienia funkcji regularnych, który jest postaci $\mathbb{C}[S]$, dla pewnego monoidu $S \subset M$. Torus $T = T_M$ działający na X jest zdefiniowany jak w poprzednim zadaniu. Tą samą rozmaitość przedstaw na następujące dwa sposoby:

   - Za pomocą parametryzacji $T \longrightarrow \mathbb{C}^r$, zgodnej z pewnym działaniem torusa T na $\mathbb{C}^r$ (za pomocą charakterów, podaj jakich), przy której X jest domknięciem obrazu.
   - Za pomocą ideałów dwumianowych czyli generowanych przez elementy postaci $\overline{x}^\alpha - \overline{x}^\beta$, w pierścieniu wielomianów $\mathbb{C}[\overline{x}]$, gdzie torus T działa na wektorze zmiennych $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ za pomocą pewnych charakterów (podaj te charaktery).

   (a) $S = \sigma \cap M$ gdzie M jest kratą generowaną przez wektory e_i a stożek σ jest zadany przez wektory v_i w $M_\mathbb{R}$:

      i. $M = \mathbb{Z}^2$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + n \cdot e_2$, gdzie n jest całkowite dodatnie,

      ii. $M = \mathbb{Z}^3$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$, $v_4 = e_1 + e_2 - e_3$.

   (b) $S = \Delta \cap M$ gdzie $M = \mathbb{Z}^2$ jest jak wyżej a Δ jest obszarem wypukłym opisanym przez następujące nierówności podane w bazie dualnej: $e_1^* \geq 0$, $e_2^* \geq 0$ i $e_1^* + e_2^* \geq n$, gdzie $n = 2,\ 3$.

3. Następujące rozmaitości toryczne zadane są parametrycznie przez wybór charakterów pewnego torusa. Znajdź opis pierścienia funkcji regularnych na tych rozmaitościach wraz z działaniem torusa, który

jest zawarty w tej rozmaitości, czyli przedstaw go w formie $\mathbb{C}[S]$ gdzie S jest monoidem rozpinającym kratę M.

(a) $\mathbb{C} \ni t \longrightarrow (t^4, t^6) \in \mathbb{C}^2$

(b) $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \ni (t_i, s_j) \longrightarrow (t_i \cdot s_j) \in \mathbb{C}^{pq}$

4. Niech S będzie skończenie generowaną półgrupą abelową z jednością zawartą w kracie M. Załóżmy ponadto, że krata M jest generowana przez elementy z S. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

   - Pierścień $k[S]$ jest całkowicie domknięty w ciele swoich ułamków.
   - Półgrupa S jest nasycona w M, czyli jeśli dla $u \in M$ i $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zachodzi $mu \in S$ to $u \in S$.
   - Półgrupa składa się z punktów kratowych wielościennego stożka wymiernego, czyli $S = M \cap \sigma$ gdzie $\sigma = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}_{\geq 0} u_i \subseteq M_{\mathbb{R}}$ oraz $u_1, \ldots, u_r \in M$.

5. Niech Γ oznacza drzewo binarne, czyli graf jednospójny, którego każdy wierzchołek należą do trzech albo do jednej krawędzi, w tym drugim przypadku wierzchołek nazywamy liściem. Zbiór liści takiego drzewa oznaczamy $\mathcal{L}$ a zbiór krawędzi $\mathcal{K}$, przyjmujemy $|\mathcal{L}| = l$ i $|\mathcal{K}| = k$, i ustalamy etykietowanie (ponumerowanie) liści i krawędzi, to jest piszemy : $\mathcal{K} = \{\kappa_i : i = 1, \ldots, k\}$, $\mathcal{L} = \{\lambda_i : i = 1, \ldots, l\}$.

   (a) Pokaż, że $2l - k = 3$.

   (b) Pokaż, że dla każdej pary różnych liści (λ_i, λ_j), istnieje dokładnie jedna najkrótsza ścieżka γ łącząca λ_i i λ_j (czyli spójny podgraf zawierający te wierzchołki o najmniejszej liczbie krawędzi). Zbiór krawędzi w tej ścieżce będziemy oznaczać $\mathcal{K}(\lambda_i, \lambda_j)$.

   (c) Dla ustalonego Γ definiujemy odwzorowanie $\phi_\Gamma : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{l(l-1)/2}$ gdzie współrzędne w $\mathbb{C}^{l(l-1)/2} = \{(s_{ij})\}$ indeksowane są parami liczb $1 \leq i < j \leq l$ oraz $\phi_\Gamma(t_1, \ldots, t_k) = (\cdots, s_{ij}, \cdots)$, gdzie

   $$s_{ij} = \prod_{\kappa_p \in \mathcal{K}(\lambda_i, \lambda_j)} t_p$$

   Znajdź odwzorowanie ϕ_Γ dla drzew o co najwyżej 5 liściach, czyli dla $l \leq 5$.

   (d) Dowiedź, że domknięcie obrazu odwzorowania ϕ_Γ jest rozmaitością toryczną. Znajdź prezentację jej pierścienia funkcji regularnych w formie $\mathbb{C}[S]$ dla pewnego monoidu S w pewnej kracie M. Zrób to dla drzew z liczbą liści $l \leq 5$.