Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 2: stożki i algebry

Rozmaitości są zdefinowane nad ciałem $k = \mathbb{C}$.

Jak zwykle M i N są kratami dualnymi rangi n. Będziemy zakładać, że stożki w $M_{\mathbb{R}}$ są maksymalnego wymiaru a stożki w $N_{\mathbb{R}}$ są sciśle wypukłe. Przez $T_M \simeq (k^*)^n$ oznaczamy torus, którego grupa charakterów to $M \simeq \mathbb{Z}^n$; czyli $T_M = Hom(M, \mathbb{C}^*)$.

Będziemy rozważać algebry postaci $A_S = \mathbb{C}[S] = \{\sum_{\text{finite}} a_s\chi^s : s \in S, a_s \in \mathbb{C}\}$, gdzie $S \subset M$ jest pewną podpółgrupą (z zerem). Element $f \in A$ nazywamy jednorodnym wagi χ o ile $f \in A_\chi$. Mnożenie w A_S jest $\mathbb{C}$-dwuliniowe oraz dla $s_1,\ s_2 \in S$ mamy $\chi^{s_1} \cdot \chi^{s_2} = \chi^{s_1+s_2}$.

Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to zakładamy, że S jest skończenie generowanym monoidem, lub równoważnie, A jest skończenie generowaną $\mathbb{C}$-algebrą a więc $A = \mathbb{C}[X]$ dla pewnej rozmaitości afinicznej X.

Jeśli $S = \sigma \cap M$ dla pewnego stożka $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$ to $\mathbb{C}[S]$ będziemy oznaczali po prostu A_σ.

1. Oznaczenia jak wyżej. Przypomnijmy, że gradacja w M wyznacza działanie T_M na A zadane wzorem $T_M \times A_\chi \ni (t, f) \mapsto \chi(t) \cdot f \in A_\chi$; przy tym działaniu A_χ jest podprzestrzenią własną charakteru χ.

   (a) Pokaż, że wybór jednorodnych generatorów $f_i \in A$, gdzie $r = 1, \ldots, r$, o wagach $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r)$ zadaje włożenie $X \subset \mathbb{A}^r_k$ przy którym X jest zbiorem T_M-niezmienniczym dla działania torusa $T_M \times \mathbb{A}^r_k \longrightarrow \mathbb{A}^r_k$ zadanego wzorem

   $$t(x_1, \cdots, x_r) = (\chi_1(t)t_1, \ldots, \chi_r(t)t_r)$$

   (mówimy, że działanie to ma wagi χ_i).

   (b) Pokaż, że ta zdefiniowane działanie T_M na X nie zależy od wyboru generatorów.

   (c) Niech $M' \subset M$ będzie kratą generowaną przez $\{\chi \in M : A_\chi \neq 0\}$. Pokaż, że grupa ilorazowa M/M' jest grupą charakterów pewnego quasitorusa $H \subseteq T_M$, który na A i na X działa trywialnie. Pokaż, że o ile $M' = M$ to działanie T_M jest wierne, czyli jedynie $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ działa jak identyczność.

2. Dla S jak wyżej zdefiniujmy stożek $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$ wzorem $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot S$. Niech W_σ oznacza maksymalną podprzestrzeń wektorową zawartą w σ. Niech $\mathfrak{m}_S = \{\sum a_s\chi^s \in \mathbb{C}[S] : \ \forall_{s \in W_\sigma} \ \ a_s = 0\}$. Pokaż, że $\mathfrak{m}_S$ jest ideałem pierwszym w $\mathbb{C}[S]$ i roztrzygnij kiedy jest ideałem maksymalnym.

3. Grupę cykliczną $\mathbb{Z}_m$ realizujemy jako grupę multiplikatywną $G_{\mathfrak{m}} < \mathbb{C}^*$ generowaną przez $\epsilon_m = e^{2\pi i/m}$. Grupa G_m działa diagonalnie na $\mathbb{C}^n$ z pierścieniem współrzędnych $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ z wagami $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ o ile

$$\epsilon_m \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\epsilon_m^{a_1} x_1, \cdots, \epsilon_m^{a_n} x_n)$$

Będziemy dodatkowo zakładać, że działanie to jest wierne czyli m nie ma nietrywialnego wspólnego dzielnika ze wszystkimi a_i.

(a) Pokaż, że każde działanie liniowe G_m na $\mathbb{C}^n$ jest diagonalizowalne oraz daje to zanurzenie $G_m \hookrightarrow T = (\mathbb{C}^*)^n$ w standardowy torus z ilorazem, który jest torusem; oznaczmy go T_M.

(b) Niech $N' = \mathbb{Z}^n$ będzie standardową kratą całkowitą w $\mathbb{R}^n$. Zdefiniujmy kratę $N = N' + \mathbb{Z} \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)/m \subset \mathbb{R}^n$. Pokaż, że mamy ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0$$

i jeśli zastosujemy do niego funktor $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ to dostaniemy

$$1 \longrightarrow G_m \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow T_M \longrightarrow 1$$

(c) Przedstaw efektywnie pierścień niezmienników działania diagonalnego G_m na $\mathbb{C}^n$, czyli $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{G_m}$, jako algebrę $\mathbb{C}[\sigma \cap M]$, gdzie M jest kratą dualną do kraty N.

4. Pokaż, że o ile $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ jest stożkiem symplicjalnym (czyli generowanym przez tyle elementów ile wynosi jego wymiar) maksymalnego wymiaru, to algebra $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ jest pierścieniem niezmienników dla pewnego działania diagonalnego pewnej grupy abelowej H na $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Wskazówka: niech $\widehat{N} \subset N$ oznacza kratę rozpiętą na generatorach stożka σ oraz weźmy $G = \widehat{N}/N$, wówczas $H < T_{\widehat{N}} = \widehat{N} \otimes \mathbb{C}^*$ jest grupą skończoną, która działa na $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \widehat{M}]$, gdzie $\widehat{M} \supset M$ jest kratą dualną do $\widehat{N}$.