Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 11: krzywe i dywizory na rozmaitościach torycznych. Jak zwykle M i N to są kraty dualne wymiaru n. W tej serii zadań wachlarze w $N_{\mathbb{R}}$ są symplicjalne.

1. Załóżmy, że σ jest stożkiem symplicjalnym w którym promienie są generowane przez wektory prymitywne $v_1, \cdots v_n$ z kraty N. Niech r_n oznacza indeks kraty generowanej przez $v_1, \ldots v_n$ w kracie N natomiast niech r oznacza indeks kraty generowanej przez $v_1, \ldots, v_{n-1}$ w swoim nasyceniu w N, czyli w $N' = N \cap \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{R} v_i$; ponadto oznaczmy $b_n = r_n/r$.

   (a) Pokaż, że $N/N' \simeq \mathbb{Z}$ i przy tym izomorfiźmie v_n przechodzi na $\pm b_n$.

   (b) Pokaż, że istnieje $u_n \in M$ takie, że $u_n(v_i) = 0$ dla $i < n$ oraz $u_n(v_n) = b_n$ i u_n jest niepodzielne w M.

   (c) W algebrze $A_\sigma = k[\sigma^\vee \cap M]$ rozpatrzmy ideał I_n generowany przez jednomiany χ^u takie, że $u(v_i) > 0$ dla $i < n$. Pokaż, że $A_\sigma / I_n = k[\chi^{u_n}]$.

   (d) Niech D_n będzie dywizorem w $U_\sigma = X(\Sigma(\sigma))$ odpowiadającym promieniowi generowanemu przez v_n. Pokaż, że $b_n D_n$ jest dywizorem głównym odpowiadającym funkcji χ^{u_n}

2. Załóżmy, że wachlarz Σ zawiera dwa stożki symplicjalne maksymalnego wymiaru $\sigma_n = \langle v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \rangle$ i $\sigma_{n+1} = \langle v_1, \ldots, v_{n-1}, v_{n+1} \rangle$, gdzie v_i są wektorami prymitywnymi w N. Przyjmujemy oznaczenia z poprzedniego zadania, modyfikując je nieznacznie, dla stożków σ_n i σ_{n+1}, i odpowiednio definiujemy liczby b_n i b_{n+1}; $D_1, \ldots D_n, D_{n+1}$ to dywizory w $X(\Sigma)$ odpowiadające promieniom generowanym przez $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$.

   (a) Pokaż, że $b_{n+1} v_n + b_n v_{n+1}$ jest $\mathbb{Q}$-kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_{n-1}$. W szczególności mamy jednoznacznie wyznaczoną relację $\sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i = 0$, gdzie $a_i \in \mathbb{Q}$ oraz $a_n = b_n^{-1}$, $a_{n+1} = b_{n+1}^{-1}$.

   (b) Pokaż, że każdy z dywizorów D_i jest $\mathbb{Q}$-Cartier, czyli pewna jego krotność jest Cartier. Przecięcie krzywej zupełnej C i dywizora $\mathbb{Q}$-Cartier D na rozmaitości X definiujemy jako $C \cdot D = (C \cdot mD)/m \in \mathbb{Q}$, gdzie mD jest Cartier.

(c) Niech $C \subset X(\Sigma)$ będzie T_N-niezmienniczą krzywą, domknięciem 1-wymiarowej orbity odpowiadającej stożkowi $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$. Pokaż, że a_i zdefiniowane w punkcie (a) są równe $C \cdot D_i$.

3. To zadanie nawiązuje do zadania 6 z serii VI i zadania 2 z serii VII. Niech Σ będzie zupełnym i symplicjalnym wachlarzem w N. Załóżmy, że promienie w Σ są generowane przez prymitywne wektory $v_1, \ldots, v_r$. Definiujemy $\widehat{N} = \bigoplus \mathbb{Z}\widehat{v}_i$ i odwzorowanie $\widehat{N} \to N$, $\widehat{v}_i \mapsto v_i$; zakładamy, że to jest odwzorowanie suriektywne. Odwzorowanie dualne jest postaci $M \to \widehat{M}$, $u \mapsto \sum u(v_i) \cdot \widehat{v}_i^*$. Jądro pierwszego odzworowania oznaczmy przez Z_1 a drugiego przez Z^1, mamy ich naturalną dualność, albo inaczej parowanie. Wiemy, że $Z^1 \simeq \mathrm{Cl}X(\Sigma)$.

   (a) Dla domknięcia 1-wymiarowej orbity T_n, krzywej C, odpowiadającej stożkowi $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$, który jest wspólną ścianą stożków $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\rangle$ i $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}, v_{n+1}\rangle$, kładziemy $[C] = \sum a_i \widehat{v}_i$, gdzie a_i są zdefiniowane w poprzednim zadaniu. Pokaż, że $[C] \in Z_1 \otimes \mathbb{Q}$ oraz dla każdego T_N niezmienniczego dywizora D_j odpowiadającego promieniowi rozpiętemu przez v_j zachodzi $C \cdot D_j = \widehat{v}_j^*([C]) = [C] \cdot [D_j]$, gdzie $[D_j]$ jest klasą dywizora D_j w $\mathrm{Cl}X(\Sigma) = Z^1$.

   (b) Pokaż, że stożek Nef z zadania VII.2 jest dualny do stożka rozpiętego przez elementy $[C]$ zdefiniowane jak wyżej; stożek ten będziemy oznaczali $\mathrm{NE}(X)$.

4. W tym zadaniu badamy powierzchnie toryczne; Σ jest wachlarzem w dwuwymiarowej kracie spełniającym warunki poprzedniego zadania; $X = X(\Sigma)$.

   (a) Pokaż, że klasa $[C]$ może leżeć wewnątrz stożka $\mathrm{NE}(X)$.

   (b) Pokaż, że jeśli klasa $[C]$ rozpina promień stożka $\mathrm{NE}(X)$, to albo wymiar Z^1 jest jeden, albo wymiar Z^1 jest 2 i C jest włóknem odwzorowania $X \to \mathbb{P}^1$, albo istnieje biwymierne odwzorowanie toryczne $X \to X'$, które ściąga krzywą C do punktu a poza C jest izomorfizmem na obraz.