Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 10: Przekroje snopów refleksywnych.

1. Przypomnijmy, że powierzchnia Hirzebrucha $\mathbb{F}_a$ została zdefiniowana w zadaniu 1 serii 5; będziemy korzystać z oznaczeń z tego zadania. Policz wymiar przestrzeni cięć globalnych snopa odwracalnego dla T-niezmienniczego dywizora $b_1D_1 + b_2D_2$, gdzie D_i odpowiada promieniowi rozpiętemu przez e_i.

2. Rozpatrzmy rozdmuchanie płaszczyzny; będziemy korzystać z oznaczeń z zadania 9 serii 4: stożek σ^+ jest rozpięty przez $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$, rozdmuchanie jest zdefiniowane przez dodanie $e_0 = e_1 + e_2$. Niech D będzie dywizorem niezmienniczym odpowiadającym promieniowi $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_0$. Pokaż, że $\Gamma(\mathcal{O}(aD))$ jest modułem beztorsyjnym nad pierścieniem $\mathbb{C}[M \cap (\sigma^+)^\vee]$.

   (a) Znajdź generatory tego modułu dla dowolnego a; pokaż, że dla $a \geq 0$ ten moduł jest wolny.

   (b) Dla $a < 0$ pokaż jak $\Gamma(\mathcal{O}(aD))$ wyinterpretować jako $-a$-tą potęgę ideału zera na płaszczyźnie.

   Zobacz również www.mimuw.edu.pl/∼jarekw/java/ToricExamples.html

3. Zmodyfikujmy poprzednie zadania w sposób następujący: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 2)$, $e_0 = e_1 + e_2$ i weźmy wachlarz zupełny rozpięty na tych promieniach, oznaczmy go Σ_2. Niech D będzie dywizorem niezmienniczym odpowiadającym promieniowi $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_0$.

   (a) Pokaż, że grupa klas rozmaitości $X_2 = X(\Sigma_2)$ jest generowana przez połówkę dywizora D, czyli istnieje klasa $\alpha \in \mathrm{Cl}(X_2)$ taka, że $-2\alpha = D$.

   (b) Znajdź generatory $\Gamma(\mathcal{O}_{X_2}) = \mathbb{C}[M \cap \langle e_1, e_2\rangle^\vee]$–modułu $\Gamma(\mathcal{O}(aD))$ dla dowolnego a.

   (c) Pokaż, że dla $a \geq 0$ moduł $\Gamma(\mathcal{O}(aD))$ jest wolny, natomiast dla $a < 0$ moduł $\Gamma(\mathcal{O}(aD))$ jest ideałem w $\Gamma(\mathcal{O}_{X_2})$.

4. Poprzednie zadanie przełożymy na język zadania 4 z serii 7: czyli teraz $\widehat{N}$ jest kratą rozpiętą przez e_1 i e_2 oraz $H = N/\widehat{N} \simeq \mathbb{Z}_2$. Przy oznaczeniach z tamtego zadania $B = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \widehat{M}]$ ma naturalną gradację w $\mathbb{Z}_2$, to jest $B = B_0 \oplus B_1$ gdzie $B_0 = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$.

(a) Pokaż, że dla $d \leq 0$ moduł $\Gamma(X_2, \mathcal{O}(d\alpha))$ jest izomorficzny z B_0 albo B_1, w zależności od parzystości d, jako B_0–moduł.

(b) Pokaż, że dla $\Gamma(X_2, \mathcal{O}(d\alpha))$ można wyinterpretować jako B_0–podmoduł B_0 albo B_1, w zależności od parzystości d. Poniższy rysunek ilustruje stopnie jednomianów w $\widehat{M}$, które są w $\Gamma(X_2, \mathcal{O}(d\alpha))$; linię "odcięcia" można interpretować jako waluację względem dywizora D.