Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 1: kraty, torusy i stożki.

Krata to grupa skończenie generowana grupa abelowa bez elementów torsyjnych, więc izomorficzna z $\mathbb{Z}^d$, dla pewnego $d \geq 0$. Będziemy zwykle rozważać kraty dualne M i $N = Hom(M, \mathbb{Z})$, które zwykle będziemy umieszczać w (dualnych) przestrzeniach $N_\mathbb{R} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ i $M_\mathbb{R} = M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. Parowanie (ewaluację) $M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$ będziemy oznaczać przez $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$.

1. Torus zespolony (lub po prostu torus) to grupa multiplikatywna $(\mathbb{C}^*)^d$. Jeśli nie mówimy inaczej to torus zespolony rozważany jest z topologią zespoloną (euklidesową).

   (a) Pokaż, że mamy naturalny izomorfizm grup abelowych (lub $\mathbb{Z}$-modułów) $N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \simeq Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*)$, które są torusami zespolonymi; będziemy ten torus oznaczać T_N lub T_M.

   (b) Pokaż, że funktor domnażania $N \longrightarrow N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^*$ jest prawodkładny, to jest suriekcje przechodzą na suriekcje. Niech $N \longrightarrow N'$ będzie iniekcją krat z torsyjnym kojądrem H. Pokaż, że mamy ciąg dokładny
   $$1 \longrightarrow H \longrightarrow T_N \longrightarrow T_{N'} \longrightarrow 1$$

   (c) Sformułuj i dowiedź odpowiednią wersję powyższych własności dla $M \longrightarrow Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*)$

2. Charaktery: Dla $u \in M$ zdefiniujmy $\chi^u : T_M \to \mathbb{C}^*$ wzorem $Hom(M, \mathbb{C}^*) \ni \phi \mapsto \chi^u(\phi) = \phi(u)$. Takie χ^u nazywamy charakterem torusa T_M odpowiadającym u. Dla $v \in N$ definiujemy $\lambda_v : \mathbb{C}^* \to T_N$ wzorem $\lambda_v(t) = v \otimes t$; takie λ_v nazywamy 1-parametrową podgrupą T_N.

   (a) Pokaż, że jeśli $u_1, \ldots, u_d$ jest bazą M to $\chi^{u_1}, \ldots, \chi^{u_d}$ są współrzędnymi na T_M, to jest wyznaczają izomorfizm T_M z $(\mathbb{C}^*)^d$, oraz charaktery T_M są jednomianani (o dodatnich i ujemnych wykładnikach) od zmiennych χ^{u_i}.

   (b) Korzystając z izomorfizmu $T_M \simeq (\mathbb{C}^*)^d$ zdefiniuj działanie grupowe na T_M oraz pokaż, że χ_u i λ_v są homorfizmami grup. Zbadaj jak wygląda ich złożenie $\chi^u \circ \lambda_v : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ i sprawdź, jak podgrupa $\lambda_v(\mathbb{C}^*) \subset T_M$ działa na pierścieniu współrzędnych $\mathbb{C}[\chi_{u_1}^{\pm 1}, \cdots, \chi_{u_d}^{\pm 1}]$.

3. Mówimy, że torus $T = (\mathbb{C}^*)^n$ działa algebraicznie na skończenie wymiarowej zespolonej przestrzeni liniowej W wymiaru d o ile istnienie odwzorowanie algebraiczne (zadane przez wielomiany od współrzędnych) $\varphi : T = (\mathbb{C}^*)^n \to GL(V) \subset \mathbb{C}^{d^2}$, które jest homomorfizmem grup. Dla $t \in T$ i $v \in V$ wartość $\varphi(t)(v)$ będziemy zapisywać po prostu $t(v)$.

   (a) (Przypadek 1-wymiarowy.) Niech $d = 1$. Pokaż, że algebraiczne działanie na V jest diagonalizowalne. To jest: znajdź na V liniowy układ współrzędnych $(z_1, \ldots, z_d)$ taki, że dla $t \in \mathbb{C}^*$ mamy $t(z_1, \ldots, z_d) = (t^{a_1} z_1, \ldots, t^{a_d} z_d)$, gdzie $a_i \in \mathbb{Z}$. Wskazówka: dowiedź najpierw podobne twierdzenie dla dowolonej podgrupy skończonej $G \subset \mathbb{C}^*$ pierwiastków z 1.

   (b) Pokaż, że każde działanie algebraiczne torusa zespolonego $T = (\mathbb{C}^*)^n$ na W jest diagonalizowalne. To znaczy, istnieje baza $w_1, \ldots, w_d$ przestrzeni W oraz charaktery $\chi_1, \ldots, \chi_d$ (jednomiany od współrzędnych torusa) takie, że działanie T na w_i jest mnożeniem przez χ_i. Skorzystaj z tego, że przemienne operatory liniowe zachowują swoje podprzestrzenie własne.

4. Wymierny stożek wielościenny $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ to zbiór postaci $\sigma = \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot a_i$, gdzie suma jest skończona zaś $a_i \in N$ (to jest są to punktu o współrzednych z kraty N). Często będziemy taki obiekt nazywać po prostu stożkiem.

   (a) Pokaż, że o ile σ jest wymiernym stożkiem wielościennym to stożek dualny $\sigma^\vee = \{u \in M_{\mathbb{R}} : u_{|\sigma} \geq 0\}$ też jest wymiernym stożekiem wielościennym.

   (b) Pokaż, że operacja $\sigma \longrightarrow \sigma^\vee$ odwraca inkluzje oraz $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.

   (c) Stożek nazywamy sciśle wypukły o ile nie zawiera nietrywialnej podprzestrzeni liniowej. Pokaż, że jeśli $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ jest sciśle wypukły i generuje $N_{\mathbb{R}}$, co oznacza $\sigma + (-\sigma) = N_{\mathbb{R}}$, to jego stożek dualny też jest sciśle wypukły i generuje $M_{\mathbb{R}}$.

   (d) Wymiar stożka σ to wymiar przestrzeni liniowej $\sigma + (-\sigma)$. Pokaż, że wymiar stożka w $N_{\mathbb{R}}$ jest równy kowymiarowi największej (pod)przestrzeni liniowej w $M_{\mathbb{R}}$ zawartej w jego stożku dualnym.

   (e) Pokaż, że dla stożków mamy $(\sigma \cap \tau)^\vee = \sigma^\vee + \tau^\vee$.

5. Niech $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ będzie wymiernym stożkiem wielościennym. Ściana $\tau \subseteq \sigma$ to zbiór postaci $\sigma \cap u^\perp$ gdzie $u \in \sigma^\vee$ a $u^\perp = \{v \in N_{\mathbb{R}} : \langle u, v \rangle = 0\}$. Piszemy wówczas $\tau \preceq \sigma$.

(a) Pokaż, że ściany też są stożkami wielościennymi, przecięcie ścian jest ścianą i ściana ściany jest ścianą.

(b) Dla $\tau \preceq \sigma$ definiujemy $\tau^* = \{u \in \sigma^\vee : u_{|\tau} = 0\}$. Pokaż, że $\tau^* \preceq \sigma^\vee$, suma $dim\tau + dim\tau^*$ jest równa randze N oraz relacja $\tau \mapsto \tau^*$ zadaje bijekcję ścian σ i $\sigma^\vee$ odwracającą inkluzję.

6. Relatywnym wnętrzem stożka σ nazywamy jego wnętrze w sensie topologii przestrzeni liniowej $\sigma + (-\sigma)$. Dowiedź lemat o rozdzielaniu: Załóżmy, że stożki σ_1 i σ_2 przecinają się wzdłuż wspólnej ściany τ. Pokaż, że dla każdego u z relatywnego wnętrza $\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2^\vee)$ mamy $\tau = \sigma_1 \cap u^\perp = \sigma_2 \cap u^\perp$.

7. Niech $\Delta \subset N_\mathbb{R}$ będzie bryłą wypukłą (wielościenną) zawierającą 0. Kładziemy $\nabla = \{u \in M_\mathbb{R} : \langle \Delta, u \rangle \geq -1\}$. Pokaż, że jeśli Δ jest stożkiem to $\nabla = \Delta^\vee$. Definiujemy

$$head(\Delta) = \bigcup_{t\to\infty} t\cdot\Delta \quad \text{i} \quad tail(\Delta) = \bigcap_{t\to 0} t\cdot\Delta$$

Pokaż, że $head(\Delta)$ i $tail(\Delta)$ to stożki wypukłe (wielościenne) oraz $tail(\nabla) = head(\Delta)^\vee$ i $head(\nabla) = tail(\Delta)^\vee$