Matematyka jako przeciwieństwo poezji?

Inauguracja roku akademickiego 2011/2012, WMIM UW

J. A. Wiśniewski

29 września 2011

Witkiewicz-Grechuta (poezja matematyczna)

Nad zrębem planety, pośród gwiezdnej nocy
szereg alefów w nieskończoność pełznie
i nieskończoność unieskończoniona
zamiera sama w sobie przez siebie zdradzona
. . . .
punkt się rozpreżył w *n* wymiarów przestrzeń
i przestrzeń klapła jak przekłuty balon

Marek Grechuta (Stanisław Witkiewicz)
Hop, szklankę piwa (Szalona Lokomotywa)

Witkiewicz-Grechuta (poezja matematyczna)

Nad zrębem planety, pośród gwiezdnej nocy
szereg alefów w nieskończoność pełznie
i nieskończoność unieskończoniona
zamiera sama w sobie przez siebie zdradzona
. . . .
punkt się rozprężył w *n* wymiarów przestrzeń
i przestrzeń klapła jak przekłuty balon

Marek Grechuta (Stanisław Witkiewicz)
Hop, szklankę piwa (Szalona Lokomotywa)

Witkiewicz-Grechuta (poezja matematyczna)

Nad zrębem planety, pośród gwiezdnej nocy
szereg alefów w nieskończoność pełznie
i nieskończoność unieskończoniona
zamiera sama w sobie przez siebie zdradzona
. . . .
punkt się rozprężył w n wymiarów przestrzeń
i przestrzeń klapła jak przekłuty balon

Marek Grechuta (Stanisław Witkiewicz)
Hop, szklankę piwa (Szalona Lokomotywa)

Motto

Albert Einstein, nekrolog Emmy Noether (1882–1935):
"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.
One seeks the most general ideas of operation which will bring together in simple, logical and unified form the largest possible circle of formal relationships."

Motto

Henri Poincaré (1854–1912): “Mathematics is the art of giving the same name to different things.”
As opposed to poetry which is the art of giving different names to the same thing.

Motto

Poeci mówią w wielu słowach o jednej rzeczy.
Matematycy potrafią wyrazić różne rzeczy w tym samym języku.

Plan

Disclaimer

Wszelkie podobieństwo do osób rzeczywistych jest przypadkowe i niezamierzone.

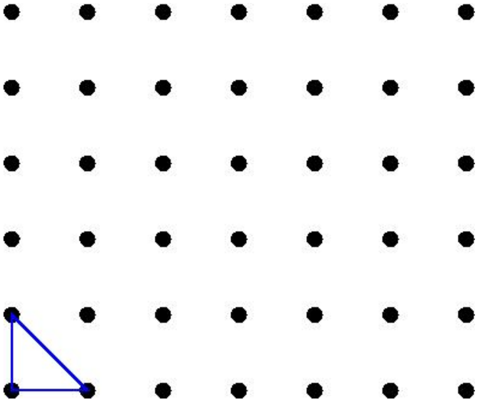
wielościany i kraty

Był sobie Algebraik . . . . . .

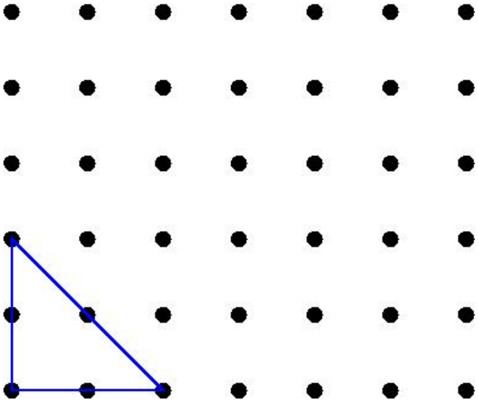
wielościany i kraty

Był sobie Algebraik, który liczył punkty kratowe w wielościanach.

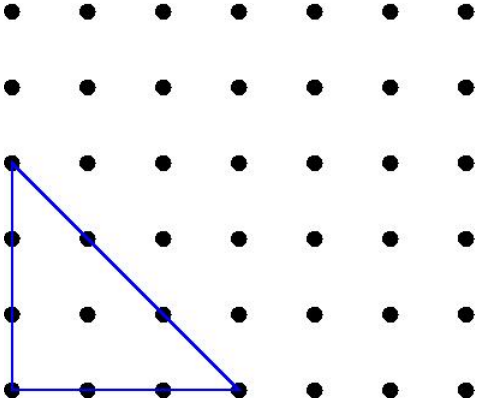
wielomian Ehrharta



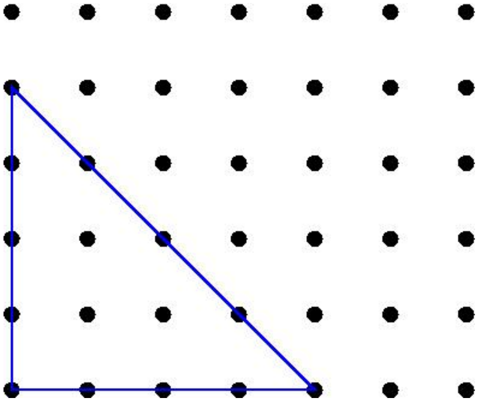
wielomian Ehrharta



wielomian Ehrharta



wielomian Ehrharta

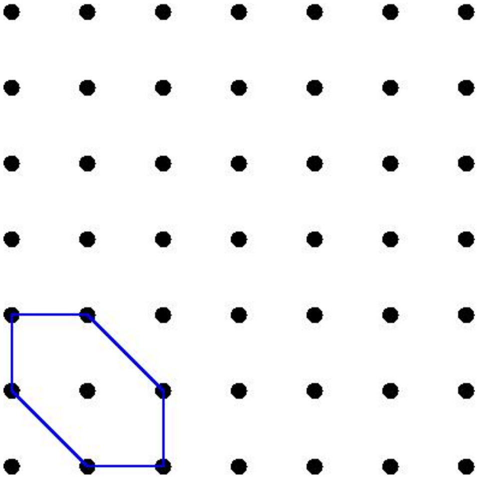


wielomian Ehrharta

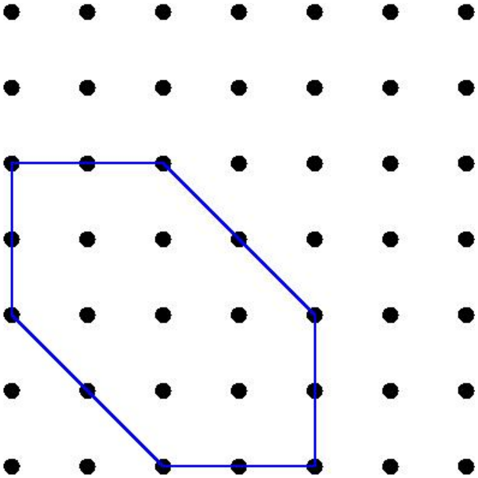
Wielomian Ehrharta liczy punkty kratowe w k-krotnie powiększonym wielościanie kratowym:

$$H(k) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$$

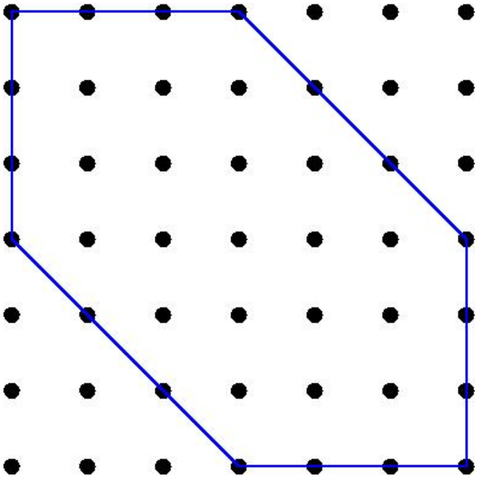
wielomian Ehrharta



wielomian Ehrharta



wielomian Ehrharta



wielomian Ehrharta

$$H(k) = 3k^2 + 3k + 1$$

niezmienniki

- Niezmienniki: funkcja z klasy obiektów w (inną) klasę obiektów (z reguły prostszą), która pozwala rozróżniać obiekty z tej pierwszej klasy (z dokładnością do izomorfizmu).
- Wielomian Ehrharta jest niezmiennikiem dla wielościanów kratowych.

kule i monety

Był sobie Statystyk. . . . . .

kule i monety

Był sobie Statystyk, który rzucał monety i kości, i rozdawał kule.

gra Statystyka (1)

- Gra nieparzysta liczba Graczy.
- Gracze wybierają spośród siebie Najstarszego a reszta dzieli się na $n+2$ Młodszych i n Starszych.
- grę rozpoczyna Najstarszy, który najpierw losuje kulę (białą lub czarną) a następnie rzuca monetami (niekoniecznie symetrycznymi) i wybranym dwóm Graczom przekazuje nowe kule w zależności od wyniku rzutów: orzeł – kula tego samego koloru, reszka – kula przeciwnego koloru
- pozostali Starsi robią kolejno to samo: po otrzymaniu kuli od poprzednika zatrzymują ją a następnie rzucając monetami losują kule i dają parze Graczy, którzy do tej pory ich nie dostali.

gra Statystyka (1)

- Gra nieparzysta liczba Graczy.
- Gracze wybierają spośród siebie Najstarszego a reszta dzieli się na $n+2$ Młodszych i n Starszych.
- grę rozpoczyna Najstarszy, który najpierw losuje kulę (białą lub czarną) a następnie rzuca monetami (niekoniecznie symetrycznymi) i wybranym dwóm Graczom przekazuje nowe kule w zależności od wyniku rzutów: orzeł – kula tego samego koloru, reszka – kula przeciwnego koloru
- pozostali Starsi robią kolejno to samo: po otrzymaniu kuli od poprzednika zatrzymują ją a następnie rzucając monetami losują kule i dają parze Graczy, którzy do tej pory ich nie dostali.

gra Statystyka (1)

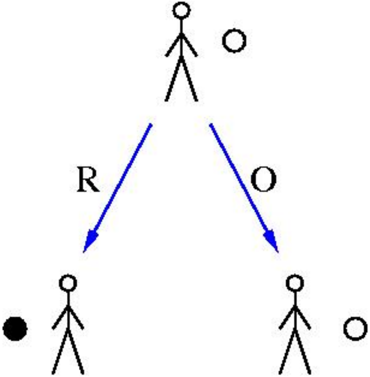
- Gra nieparzysta liczba Graczy.
- Gracze wybierają spośród siebie Najstarszego a reszta dzieli się na $n+2$ Młodszych i n Starszych.
- grę rozpoczyna Najstarszy, który najpierw losuje kulę (białą lub czarną) a następnie rzuca monetami (niekoniecznie symetrycznymi) i wybranym dwóm Graczom przekazuje nowe kule w zależności od wyniku rzutów: orzeł – kula tego samego koloru, reszka – kula przeciwnego koloru
- pozostali Starsi robią kolejno to samo: po otrzymaniu kuli od poprzednika zatrzymują ją a następnie rzucając monetami losują kule i dają parze Graczy, którzy do tej pory ich nie dostali.

gra Statystyka (1)

- Gra nieparzysta liczba Graczy.
- Gracze wybierają spośród siebie Najstarszego a reszta dzieli się na $n+2$ Młodszych i n Starszych.
- grę rozpoczyna Najstarszy, który najpierw losuje kulę (białą lub czarną) a następnie rzuca monetami (niekoniecznie symetrycznymi) i wybranym dwóm Graczom przekazuje nowe kule w zależności od wyniku rzutów: orzeł – kula tego samego koloru, reszka – kula przeciwnego koloru
- pozostali Starsi robią kolejno to samo: po otrzymaniu kuli od poprzednika zatrzymują ją a następnie rzucając monetami losują kule i dają parze Graczy, którzy do tej pory ich nie dostali.

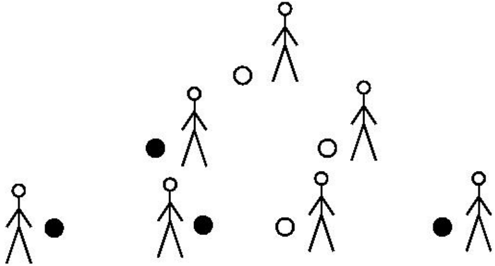
gra Statystyka (2)

Elementarny krok gry: przydzielanie kul kolejnym Graczom według reguły orzeł – kula tego samego koloru, reszka – kula przeciwnego koloru



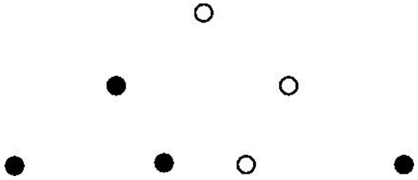
gra Statystyka (2)

Stan na koniec gry dla 7 Graczy:



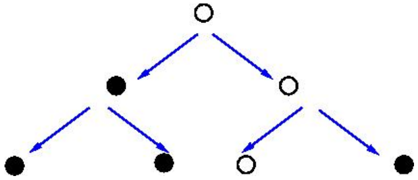
gra Statystyka (2)

Stan na koniec gry dla 7 Graczy:



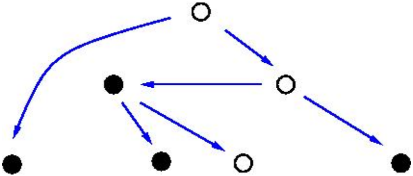
gra Statystyka (2)

Stan na koniec gry dla 7 Graczy:



gra Statystyka (2)

Stan na koniec gry dla 7 Graczy:

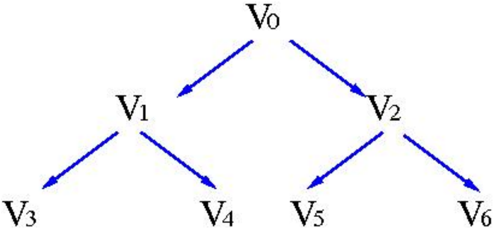


gra Statystyka (2)

Decyzja komu Starsi przekazują kule może mieć wpływ na wynik gry.

proces Markowa na drzewie

Niech $\mathcal{T}$ będzie drzewem o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V} = \{v_i\}$ z wyróżnionym wierzchołkiem v_0 i zbiorze krawędzi $\mathcal{E} = \{e = \langle v_i, v_j \rangle\}$ skierowanych od wierzchołka v_0



proces Markowa na drzewie

Prawdopodobieństwo układu kolorów w wierzchołkach zadanego funkcją $\mathcal{V} \ni v \to \rho(v) \in \{\mathrm{bialy}, \ \mathrm{czarny}\}$ wyraża się wzorem

$$P\left(\bigwedge_{v\in\mathcal{V}} \mathrm{kolor}\ v = \rho(v)\right) = P^0_{\rho(r)} \cdot \prod_{e=\langle v_i,v_j\rangle\in\mathcal{E}} P^e_{\rho(v_i)\rho(v_j)}$$

proces Markowa na drzewie

Prawdopodobieństwo układu kolorów w wierzchołkach zadanego funkcją $\mathcal{V} \ni v \to \rho(v) \in \{\text{bialy}, \ \text{czarny}\}$ wyraża się wzorem

$$P\left(\bigwedge_{v \in \mathcal{V}} \text{kolor } v = \rho(v)\right) = P^0_{\rho(r)} \cdot \prod_{e=\langle v_i, v_j \rangle \in \mathcal{E}} P^e_{\rho(v_i)\rho(v_j)}$$

gdzie $P^0_{\rho(v_0)}$ to prawdopodobieństwo wybrania przez Najstarszego kuli koloru $\rho(v_0)$

proces Markowa na drzewie

Prawdopodobieństwo układu kolorów w wierzchołkach zadanego funkcją $\mathcal{V} \ni v \to \rho(v) \in \{\text{biały}, \text{ czarny}\}$ wyraża się wzorem

$$P\left(\bigwedge_{v\in\mathcal{V}} \text{kolor } v = \rho(v)\right) = P^0_{\rho(r)} \cdot \prod_{e=\langle v_i,v_j\rangle\in\mathcal{E}} P^e_{\rho(v_i)\rho(v_j)}$$

gdzie $P^e_{\rho(v_i)\rho(v_j)}$ to
prawdopodobieństwo wyrzucenia orła o ile $\rho(v_i) = \rho(v_j)$ albo prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki o ile $\rho(v_i) \neq \rho(v_j)$

proces Markowa na drzewie

Wynik zależy od kształtu drzewa !!!

dodawanie i mnożenie

Był sobie Geometra. . . . . .

dodawanie i mnożenie

Był sobie Geometra, który nie lubił dodawać ale lubił mnożyć

parametryzacje jednomianami

Ulubione rozmaitości Geometry zadane były przez parametryzacje jednomianami

- $u \longrightarrow (u,\ u^2,\ u^3)$
- $(u, v) \longrightarrow (u,\ v,\ u \cdot v)$

parametryzacje jednomianami

Ulubione rozmaitości Geometry zadane były przez parametryzacje jednomianami

- $u \longrightarrow (u,\ u^2,\ u^3)$
- $(u, v) \longrightarrow (u,\ v,\ u \cdot v)$

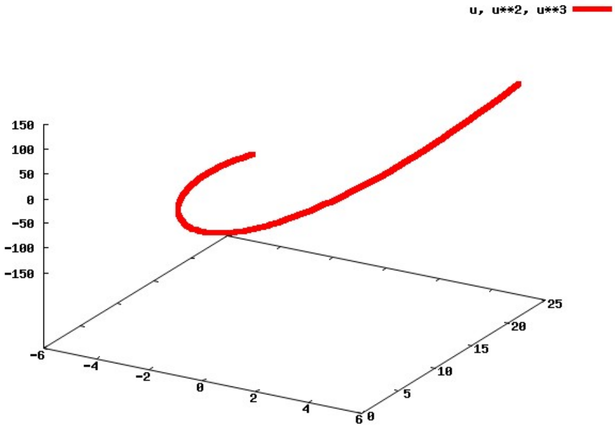
parametryzacje jednomianami

Ulubione rozmaitości Geometry zadane były przez parametryzacje jednomianami

- $u \longrightarrow (u,\ u^2,\ u^3)$
- $(u, v) \longrightarrow (u,\ v,\ u \cdot v)$

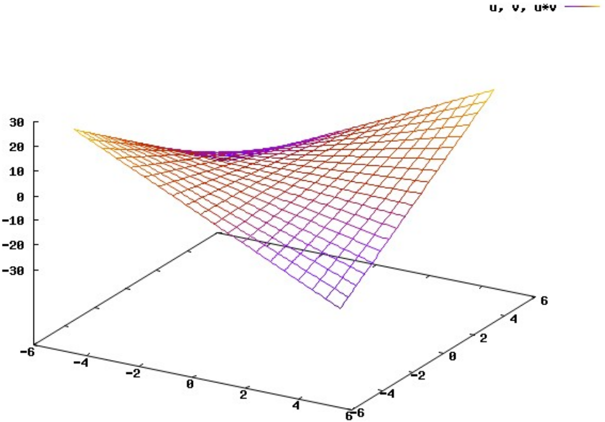
parametryzacje jednomianami

$$u \longrightarrow (u,\ u^2,\ u^3)$$



parametryzacje jednomianami

$$(u, v) \longrightarrow (u,\ v,\ u \cdot v)$$

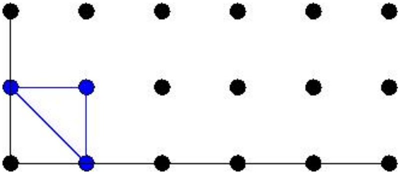


rozmaitości toryczne

Rozmaitości zadane przez parametryzacje jednomianami to rozmaitości toryczne, które można opisać za pomocą krat i wielościanów:

- $u \longrightarrow (u,\ u^2,\ u^3)$

- $(u, v) \longrightarrow (u,\ v,\ u \cdot v)$

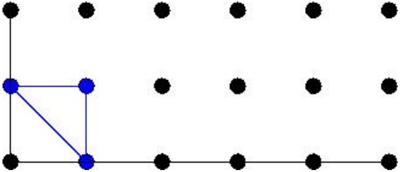


rozmaitości toryczne

Rozmaitości zadane przez parametryzacje jednomianami to rozmaitości toryczne, które można opisać za pomocą krat i wielościanów:

- $u \longrightarrow (u,\ u^2,\ u^3)$

- $(u, v) \longrightarrow (u,\ v,\ u \cdot v)$

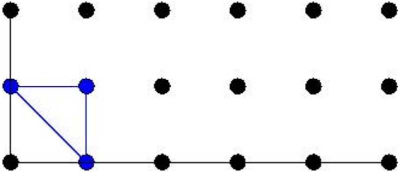


rozmaitości toryczne

Rozmaitości zadane przez parametryzacje jednomianami to rozmaitości toryczne, które można opisać za pomocą krat i wielościanów:

- $u \longrightarrow (u,\ u^2,\ u^3)$

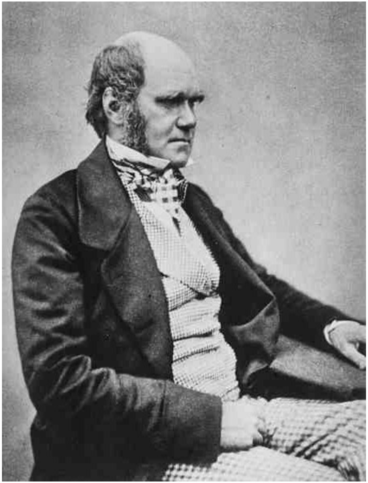
- $(u, v) \longrightarrow (u,\ v,\ u \cdot v)$

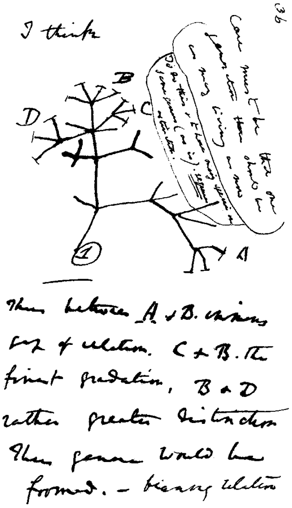


Pewnego razu. . . . . .

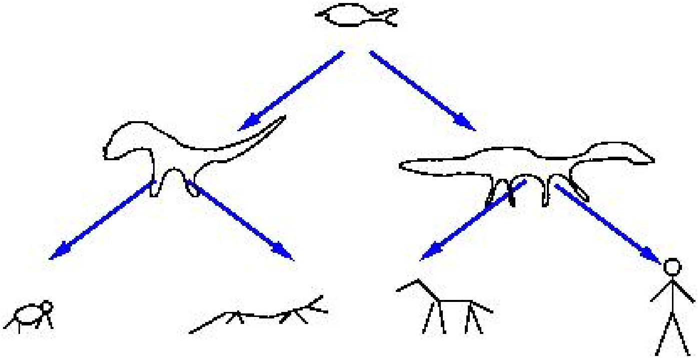
Pewnego razu , Algebraik, Statystyk i Geometra spotkali Biologa, który opowiedział im o problemie Darwina.

Charles Darwin (1809–1882)

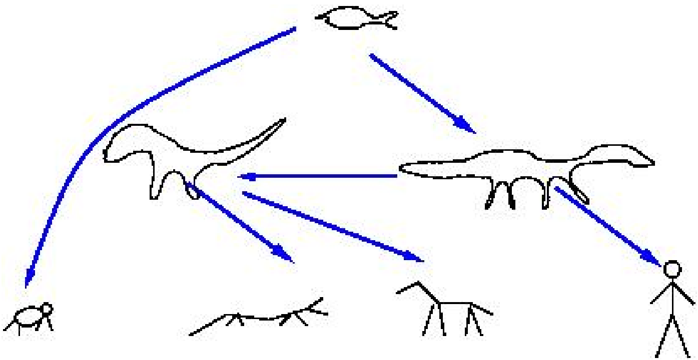




drzewo filogenetyczne



drzewo filogenetyczne

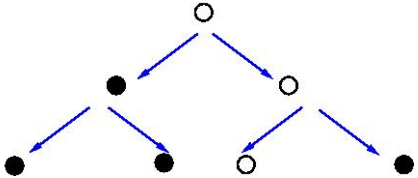


rzekł Statystyk

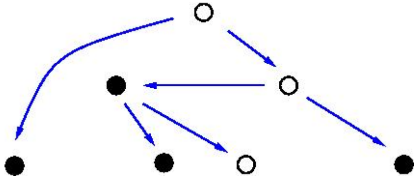
Statystyk powiedział:

– Problem Darwina można opisać w języku procesów Markowa na drzewie.

rzekł Statystyk



rzekł Statystyk



rzekł Statystyk

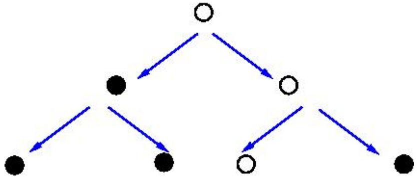
Statystyk powiedział:

– Problem Darwina można opisać w języku procesów Markowa na drzewie.

– Kłopot w tym, że nie znamy wyniku Starszych czyli gatunków, które wymarły, oraz ich "monet" czyli prawdopodobieństwa z jakim cechy są dziedziczone.

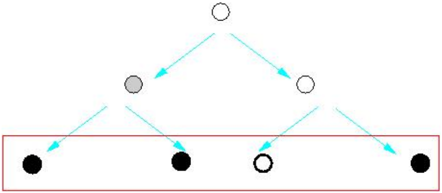
rzekł Statystyk

W tym obrazku



rzekł Statystyk

nie znamy “wyblakłych” danych



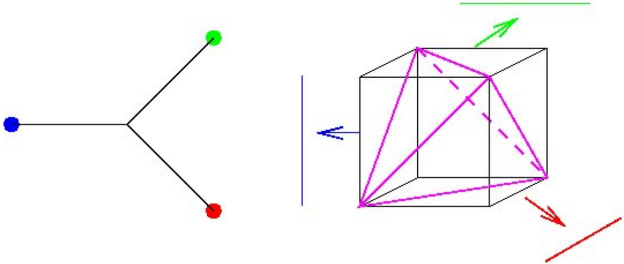
rzekł Geometra

Geometra powiedział:

– Jeśli założyć pewne reguły dziedziczenia to nie musimy znać dokładnych wartości prawdopodobieństwa. Możliwe prawdopodobieństwa będą parametryzowały rozmaitość toryczną, którą łatwo opisać w języku wielościanów kratowych. Nazwijmy ją geometrycznym modelem drzewa filogenetycznego.

rzekł Geometra

Dostaniemy taki wielościan dla modelu geometrycznego najprostszego drzewa filogenetycznego o trzech liściach



rzekł Geometra

Geometra powiedział:

– Jeśli założyć pewne reguły dziedziczenia to nie musimy znać dokładnych wartości prawdopodobieństwa. Możliwe prawdopodobieństwa będą parametryzowały rozmaitość toryczną, którą łatwo opisać w języku wielościanów kratowych. Nazwijmy ją geometrycznym modelem drzewa filogenetycznego.

– Kłopot w tym, jak odróżnić te rozmaitości.

rzekł Algebraik

Algebraik powiedział:

– Ale możemy próbować odróżnić je za pomocą wielomianów Ehrharta.

koniec bajeczek

. . . . . . jak powiedzieli tak i zrobili. . . . . .

koniec bajeczek

. . . . . . jak powiedzieli tak i zrobili. . . . . .
. . . . . . i to jest koniec bajeczek ale jeszcze nie koniec wykładu.

model binarny

Model ewolucji z gry Statystyka jest binarny: są dwie możliwości i reguły dziedziczenia są symetryczne.

Jeśli O to prawdopodobieństwo wyrzucenia orła a R to prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki, to w grze Statystyka reguły można zapisać w tabelce (macierzy), w której kolumny odpowiadają stanom wyjściowym a wiersze stanom końcowym:

$$\begin{pmatrix} O & R \\ R & O \end{pmatrix}$$

model binarny

Model ewolucji z gry Statystyka jest binarny: są dwie możliwości i reguły dziedziczenia są symetryczne.

Jeśli O to prawdopodobieństwo wyrzucenia orła a R to prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki, to w grze Statystyka reguły można zapisać w tabelce (macierzy), w której kolumny odpowiadają stanom wyjściowym a wiersze stanom końcowym:

$$\begin{pmatrix} O & R \\ R & O \end{pmatrix}$$

model 3-Kimury

Współcześnie drzewa filogenetyczne tworzy się w oparciu o informacje z łańcuchów DNA skonstruowanych z nukleotydów ACTG

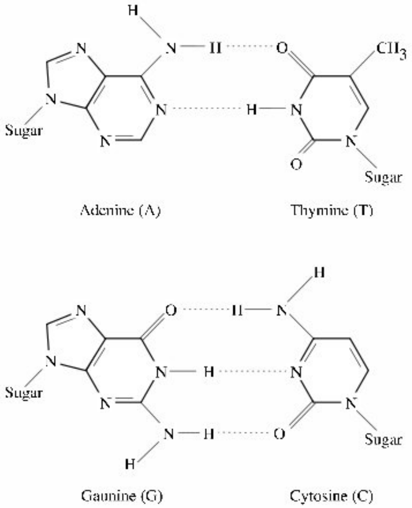
Połączenia w DNA zachowują symetrie par A–T, G–C.

model 3-Kimury

Współcześnie drzewa filogenetyczne tworzy się w oparciu o informacje z łańcuchów DNA skonstruowanych z nukleotydów ACTG

Połączenia w DNA zachowują symetrie par A–T, G–C.

model 3-Kimury



model 3-Kimury

Reguły dziedziczenia można zapisać następującą macierzą

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

i rozmaitość opisująca prawdopodobieństwo stanu aktualnego będzie toryczna.

niezmienniki modeli ewolucji

- Wielomiany Ehrharta rozróżniają modele geometryczne w przypadku 3-Kimury [Kubjas 2010] , [Donten-Bury, Michałek 2010] .
- Wielomiany Ehrharta nie rozróżniają modeli geometrycznych w przypadku binarnym [Buczyńska, W, 2006].

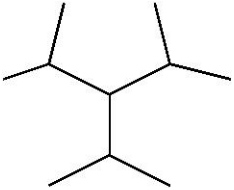
niezmienniki modeli ewolucji

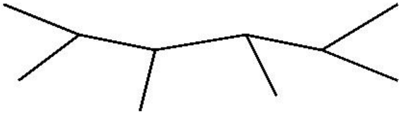
- Wielomiany Ehrharta rozróżniają modele geometryczne w przypadku 3-Kimury [Kubjas 2010] , [Donten-Bury, Michałek 2010] .
- Wielomiany Ehrharta nie rozróżniają modeli geometrycznych w przypadku binarnym [Buczyńska, W, 2006].

dwa drzewa

Dwa drzewa, śnieżynka i gąsienica, dają wielościany o tym samym wielomianie Ehrharta

$$
\begin{aligned}
H(n) &= \frac{1}{22680}\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,\cdot \\
&(31\,n^6 + 372\,n^5 + 1942\,n^4 + 5616\,n^3 + \\
&9511\,n^2 + 8988\,n + 3780)
\end{aligned}
$$





dwa drzewa

Szczęśliwie istnieją inne, bardziej skomplikowane niezmienniki, które rozróżniają te modele geometryczne drzew filogenetycznych.

dwa drzewa

Macierz incydencji ścian wielościanu dla śnieżynki

32	480	2400	6144	9312	8832	5280	1920	384
480	240	2400	9456	**19920**	**24960**	**19200**	**8880**	**2256**
2400	2400	760	5944	**19008**	**32552**	**32408**	**18792**	**5872**
6144	9456	5944	1316	**8400**	**21744**	**29308**	**21720**	**8388**
9312	**19920**	**19008**	**8400**	1392	**7200**	**14640**	**14640**	**7200**
8832	**24960**	**32552**	**21744**	**7200**	940	**3820**	**5760**	**3820**
5280	**19200**	**32408**	**29308**	**14640**	**3820**	406	1224	1224
1920	**8880**	**18792**	**21720**	**14640**	**5760**	1224	108	216
384	**2256**	**5872**	**8388**	**7200**	**3820**	1224	216	16

dwa drzewa

Macierz incydencji ścian wielościanu dla gąsienicy

32	480	2400	6144	9312	8832	5280	1920	384
480	240	2400	9456	**19904**	**24896**	**19104**	**8816**	**2240**
2400	2400	760	5944	**18976**	**32408**	**32168**	**18616**	**5824**
6144	9456	5944	1316	**8384**	**21648**	**29112**	**21552**	**8336**
9312	**19904**	**18976**	**8384**	1392	**7184**	**14584**	**14576**	**7176**
8832	**24896**	**32408**	**21648**	**7184**	940	**3816**	**5752**	**3816**
5280	**19104**	**32168**	**29112**	**14584**	**3816**	406	1224	1224
1920	**8816**	**18616**	**21552**	**14576**	**5752**	1224	108	216
384	**2240**	**5824**	**8336**	**7176**	**3816**	1224	216	16

wyjaśnienie

- Modele gemetryczne drzew o tej samej liczbie liści w przypadku binarnym można deformować jeden do drugiego [Buczyńska, W, 2006]
- W rzeczywistości są one specjalizacjami obiektów związanych z rozmaitościami spinorowymi [Sturmfels, Velasco 2009]
- Fenomen ten można powiązać z fizyką teoretyczną i teorią struny [Sturmfels, Xu, 2007], [Manon, 2010]

wyjaśnienie

- Modele gemetryczne drzew o tej samej liczbie liści w przypadku binarnym można deformować jeden do drugiego [Buczyńska, W, 2006]
- W rzeczywistości są one specjalizacjami obiektów związanych z rozmaitościami spinorowymi [Sturmfels, Velasco 2009]
- Fenomen ten można powiązać z fizyką teoretyczną i teorią struny [Sturmfels, Xu, 2007], [Manon, 2010]

wyjaśnienie

- Modele gemetryczne drzew o tej samej liczbie liści w przypadku binarnym można deformować jeden do drugiego [Buczyńska, W, 2006]
- W rzeczywistości są one specjalizacjami obiektów związanych z rozmaitościami spinorowymi [Sturmfels, Velasco 2009]
- Fenomen ten można powiązać z fizyką teoretyczną i teorią struny [Sturmfels, Xu, 2007], [Manon, 2010]

O Fizyku

Był sobie Fizyk,. . . . . .

O Fizyku

ale tej bajeczki nie potrafię (jeszcze?) opowiedzieć.

morał

Reguła Hirzebrucha (1927–): Każdy wykład ma trzy fazy:

1. zarówno prowadzący jak i widownia rozumie o czym jest mowa,
2. tylko prowadzący wie o czym mówi,
3. ani widownia, ani prowadzący nie wiedzą o co chodzi.