Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Dodatkowe zadania przed drugim kolokwium

Wszystkie rozmaitości są zdefiniowane nad ciałem algebraicznie domkniętym k.

1. Rozważmy pierścień z gradacją $A = \bigoplus_{d \geq 0} A^d = k[x_0, \ldots, x_n]$ reprezentujący współrzędne jednorodne na przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n_k$. Przez (U_i) oznaczamy otwarte pokrycie zbiorami afinicznymi $U_i = U_{x_i} = \mathbb{P}^n_k \backslash V(x_i)$. Przypomnijmy, że dla A-modułu z gradacją $M = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M^j$ definiujemy snop quasi-koherentny $\widetilde{M}$ na $\mathbb{P}^n_k$, który na zbiorach U_i ma takie wartości

$$\widetilde{M}(U_i) = M^0_{x_i} = \{m/x_i^r : m \in M^r\}$$

(a) Pokaż, że jeśli M jest skończenie generowany to $\widetilde{M}$ jest koherentny.

(b) Dla ustalonego $r \in \mathbb{Z}$ niech $M_{\geq r} \subseteq M$ będzie podmodułem takim, że $M^d_{\geq r} = 0$ dla $d < r$ oraz $M^d_{\geq r} = M^d$ dla $d \geq r$. Pokaż, że mamy naturalny izomorfizm $\widetilde{M_{\geq r}} = \widetilde{M}$.

(c) Dla ustalonego $r \in \mathbb{Z}$ niech $M(r)$ oznacza moduł z przesuniętą gradacją $M(r)^d = M^{r+d}$. Pokaż, że $\widetilde{A(r)} = \mathcal{O}(r)$.

(d) Pokaż, że dla dowolnego skończenie generowanego A modułu z gradacją mamy naturalny izomorfizm $\widetilde{M(r)} = \widetilde{M} \otimes \mathcal{O}(r)$

2. Sytuacja i oznaczenia jak w poprzednim zadaniu. Dla snopa koherentnego $\mathcal{F}$ na $\mathbb{P}^n_k$ definiujemy A-moduł z gradacją $\Gamma^*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(j)(\mathbb{P}^n_k)$, gdzie $\mathcal{F}(j) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(j)$.

(a) Sprawdź, że $\Gamma^*(\mathcal{O}) = A$ oraz $\Gamma^*(\mathcal{F}(r)) = \Gamma^*(\mathcal{F})(r)$.

(b) Zdefiniujmy morfizm snopów koherentnych $\widetilde{\Gamma^*(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathcal{F}$ taki, że dla $s/x_i^j \in \widetilde{\Gamma^*(\mathcal{F})}(U_i)$, gdzie $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(j))$, przyporządkowujemy $s \otimes x_i^{-j} \in \mathcal{F}(U_i)$. Pokaż, że to jest izomorfizm, więc $\widetilde{\Gamma^*(\mathcal{F})} \simeq \mathcal{F}$.

(c) Niech M będzie skończenie generowanym A-modułem z gradacją. Pokaż, że istnieje naturalny homomorfizm A-modułów $M \longrightarrow \Gamma^*(\widetilde{M})$ taki, że $M^d \simeq \Gamma^*(\widetilde{M})^d$ dla $d \gg 0$.

3. Różniczkowanie w punkcie. Niech A będzie skończenie generowaną k-algebrą (k jak zwykle algebraicznie domknięte). Wybierzmy ideał maksymalny $\mathfrak{m}$. Definiujemy różniczkowanie w punkcie p odpowiadającym $\mathfrak{m}$ czyli odwzorowanie $\delta_{\mathfrak{m}} : A \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ w sposób następujący: $\delta_{\mathfrak{m}}(f) = (f - f(p)) \mod \mathfrak{m}^2$ gdzie $f(p) \in A/\mathfrak{m} = k \hookrightarrow A$ wartość f w p interpretowana jako funkcja stała.

(a) Pokaż, że $\delta_{\mathfrak{m}}$ jest k-różniczkowaniem .

(b) Znajdź złożenie $\delta_{\mathfrak{m}}$ z A-homomorfizmem $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \otimes_A A/\mathfrak{m} \to \Omega_A \otimes_A A/\mathfrak{m}$, które $f \in \mathfrak{m}$ odzorowuje na $df \otimes 1$.

(c) Wywnioskuj, że mamy izomorfizm $\Omega_A \otimes_A A/\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

4. Różniczki na $\mathbb{P}^n_k$ i ciąg Eulera [Hartshorne, II.8]. Korzystamy z notacji wprowadzonej powyżej w ćwiczeniu 1. Weźmy morfizm A modułów z gradacją

$$\bigoplus_{j=0}^{n} A(-1) \cdot v_j \longrightarrow A$$

gdzie v_j są generatorami stopnia 1 i każdy v_j odwzorujemy na x_j. Przez M oznaczmy jądro tego odwzorowania.

(a) Pokaż, że mamy ciąg dokładny snopów $\mathcal{O}$-modułów

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

(b) Na U_i z pierścieniem współrzędnych $k[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$ definiujemy homomorfizm $\psi_i : \Omega_{U_i} \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus n+1}_{|U_i}$ kładąc $\psi_i(d(x_r/x_i)) = (x_i v_r - x_r v_i)/x_i^2$. Pokaż, że daje to izomorfizm na $\widetilde{M}_{|U_i}$.

(c) Pokaż, że ψ_i sklejają się do izomorfizmu snopów $\Omega_{\mathbb{P}^n} \to \widetilde{M}$ i w rezultacie mamy ciąg Eulera

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

5. W dziewiątej serii zadań dla dowolnej gładkiej (normalnej) krzywej X zdefiniowaliśmy odzorowanie stopnia $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$.

(a) Pokaż, że stopień dywizora głównego na X jest zero więc to odwzorowanie opuszcza się do $\deg : \mathrm{Cl}\, X \to \mathbb{Z}$.

(b) Pokaż, że jeśli (dla krzywej gładkiej) $\deg : \mathrm{Cl}\, X \to \mathbb{Z}$ jest izomorfizmem, to $X \simeq \mathbb{P}^1$. Wskazówka: weź dwa punkty $p_0 \neq p_\infty \in X$ i skorzystaj z tego, że $\deg(p_0 - p_\infty) = 0$.

6. Weźmy powierzchnię afiniczną $X \subset \mathbb{A}^3_k$ zadaną równaniem $xy - z^n = 0$ gdzie $n \geq 2$ (zakładamy, że charakterystyka ciała jest 0).

(a) Pokaż, że X jest powierzchnią normalną (skorzystaj z zdania 2 serii 10).

(b) Niech $D_1 \subset X$ będzie prostą zadaną przez ideał $I_1 = (x, z)$. Pokaż, że D_1 nie jest główny ale nD_1 jest główny.

(c) Pokaż, że D_1 generuje grupę $\mathrm{Cl}(X)$. Wskazówka: pokaż izomorfizm $X \setminus D_1 \simeq \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$.

7. Niech $X \subset \mathbb{A}^4_k$ bedzie zadane równaniem $xy - zw = 0$ (charakterystyka $\neq 2$). Rozpatrzmy dywizory $D_{xw} = V(x, w)$, $D_{xz} = V(x, z)$, $D_{yw} = V(y, w)$, $D_{yz} = V(y, z)$.

(a) Pokaż, że X jest 3-rozmaitością normalną; wskazówka: zmień współrzędne, $z = z' + w'$, $w = z' - w'$.

(b) Pokaż, że powyższe dywizory generują grupę klas X.

(c) Znajdź relacje pomiędzy tymi dywizorami w $\mathrm{Cl}(X)$.

(d) Policz $\mathrm{Cl}(X)$, powinno wyjść $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}$.

8. Przypomnijmy rozdmuchanie $\beta : \widehat{\mathbb{A}}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ zdefiniowane w pierwszym zadaniu czwartej serii; $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$ można pokryć dwoma kopiami $\mathbb{A}^2_k$ o współrzędnych $(x, v_1), (y, v_2)$ w których odwzorowanie β jest zadane tak $(y, v_1) \mapsto (x, xv_1)$, $(y, v_2) \mapsto (yv_2, y)$.

(a) Znajdź ideał $E = \beta^{-1}(0)$; pokaż, że $E \simeq \mathbb{P}^1_k$ i $v_1 = v_2^{-1}$ jest współrzędną niejednorodną na E.

(b) Wykorzystując generatory ideału E na wyżej zdefinionanym pokryciu afinicznym $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$ zdefiniuj funkcje przejścia dla $\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{A}}^2_k}(-E)$ na tym pokryciu.

(c) Znajdź stopień snopa lokalnie wolnego rangi jeden $\mathcal{O}_E(E)$, który jest cofnięciem na $E = \mathbb{P}^1_k$ snopa odpowiadającego dywizorowi E na $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$.

9. W zadaniu 4 w serii przygotowawczej do pierwszego kolokwium badaliśmy rozdmuchanie rozmaitości $V = V(xy - z^2) \subset \mathbb{A}^3_k$ w ideale (x, z); oznaczmy je

$\beta : \widehat{V} \to V$. Przez E oznaczmy przeciwobraz zera. Pokaż, że E jest dywizorem Cartier na $\widehat{V}$ i podobnie jak w poprzednim zadaniu znajdź stopień dywizora $\mathcal{O}_E(E)$ na E.

10. Niech $H \subset \mathbb{P}^n$ będzie nieprzywiedlną hiperpowierzchnią stopnia d. Przez U oznaczmy zbiór otwarty $\mathbb{P}^n \setminus H$.

(a) Pokaż, że U jest rozmaitością afiniczną.

(b) Pokaż, że $\check{\mathrm{H}}^1(U, \mathcal{O}^*) \simeq \mathbb{Z}_d$.