Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Dodatkowe zadania przed pierwszym kolokwium

Wszystkie rozmaitości są nad ciałem algebraicznie domkniętym k.

1. Niech $M = k[x,y]/(x,y)$ będzie $k[x,y]$-modułem. Przy oznaczeniach z zadania szóstego z drugiej serii, znajdź odpowiadający M snop $\mathcal{M}$ na $\mathbb{A}^2_k$ i jego źdźbła.

2. Niech $X \subset \mathbb{A}^2_k$ będzie podzbiorem domkniętym zadanym przez ideał $(y^2 - x^2(x+1))$ i niech morfizm $f\colon \mathbb{A}^1_k \to X$ będzie zadany wzorem $f(t) = (t^2-1, t(t^2-1))$. Pokaż, że f indukuje bijekcję $\mathbb{A}^1_k \setminus \{1\} \to X$, która nie jest izomorfizmem rozmaitości afinicznych.

3. Rozmaitość $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$ zdefiniowana w pierwszym zadaniu czwartej serii jest rozdmuchaniem $\mathbb{A}^2_k$ w ideale maksymalnym (x,y); jeżeli oznaczymy przez $u = x$, $v = y$ generatory tego ideału, to relacja $xv = uy$ definiuje $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$ jako podzbiór $\mathbb{A}^2_k \times \mathbb{P}^1_k$. Zdefiniuj w analogiczny sposób rozdmuchanie $\widehat{\mathbb{A}^2}_I \subset \mathbb{A}^2_k \times \mathbb{P}^2_k$ płaszczyzny $\mathbb{A}^2_k$ w ideale $I = (x,y)\cdot(x^2,y) = (x^3, xy, y^2)$. Znajdź pokrycie afiniczne rozmaitości $\widehat{\mathbb{A}^2}_I$ i opisz lokalnie odwzorowanie rzutowania $\widehat{\mathbb{A}^2}_I \to \mathbb{A}^2_k$. Oblicz przeciwobrazy punktów przy rzutowaniu $\widehat{\mathbb{A}^2}_I \to \mathbb{A}^2_k$.

4. Rozpatrzmy rozdmuchanie rozmaitości $V = V(xy - z^2) \subset \mathbb{A}^3_k$ w ideale (x,z); rozmaitość $\widehat{V}$ jest zadana w $\mathbb{A}^3_k \times \mathbb{P}^1_k$ przez ideał $(zt_1 = yt_0, xt_1 = zt_0)$, gdzie $[t_0 : t_1]$ to współrzędne na $\mathbb{P}^1_k$. Mamy rzutowanie $\beta\colon \widehat{V} \to V$.
   (a) Pokaż, że $\widehat{V}$ ma pokrycie afiniczne składające się z dwóch kopii płaszczyzny afinicznej. Znajdź ich współrzędne i relacje między tymi współrzędnymi.
   (b) Znajdź składowe przeciwobrazu prostej $V(y,z)$ i pokaż, że każda z nich jest lokalnie zadana jednym równaniem.

5. Pokaż, że $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$ ma naturalną strukturę rozmaitości, przy której włożenie $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$ jest morfizmem rozmaitości. Pokaż, że $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$ nie jest rozmaitością afiniczną.

6. Załóżmy, że $\operatorname{char} k \neq 2$. Pokaż, że rozmaitości afiniczne $\mathbb{A}^1_k$ i $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ nie są izomorficzne. Rozstrzygnij czy istnieje odwzorowanie suriektywne

$\mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$. Czy istnieje odwzorowanie suriektywne $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$?

7. Odwzorowanie Segre. Przypomnijmy, że odwzorowanie Segre

$$\psi^{r,s} : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^{rs+r+s}$$

jest zdefiniowane we współrzędnych jednorodnych wzorem

$$([x_0, \ldots, x_r], [y_0, \ldots y_s]) \mapsto [z_{i,j} = x_i \cdot y_j]$$

gdzie x_i i y_j to współrzędne jednorodne w $\mathbb{P}^r$ i $\mathbb{P}^s$, natomiast $z_{i,j}$ to współrzędne w $\mathbb{P}^{rs+r+s}$ dla $i = 0, \ldots, r$, $j = 0, \ldots, s$. Pokaż, że obraz odwzorowania $\psi^{r,s}$ jest podzbiorem domkniętym i znajdź ideał tego obrazu dla $r = s = 1$ i dla $r = 1$, $s = 2$.

8. Odwzorowanie Veronese. Odwzorowanie Veronese $\phi^{n,d} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, gdzie $N = \binom{n+d}{n} - 1$, definiujemy wzorem

$$[x_0, \ldots, x_n] \mapsto [z_{a_0, a_1, \ldots, a_n} = x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}]$$

gdzie $a_i \geq 0$ sumują się do d, czyli $a_0 + \cdots + a_n = d$. Znajdź ideał obrazu $\phi^{1,d}$ dla $d \geq 1$.