Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 9 na 7 maja.

Przypomnienie: dywizor Weila na rozmaitości normalnej (tak teraz będzie zwykle zakładać) X to formalna skończona suma podrozmaitości kowymiaru 1 o współczynnkach całkowitych, $D = \sum_{sk} a_i Y_i$. Grupę dywizorów Weila na rozmaitości X, z naturalnym dodawaniem, oznaczamy $\mathrm{Div}(X)$ (lub $\mathrm{WDiv}(X)$). Grupa klas rozmaitości X oznaczana $Cl(X)$ to iloraz $\mathrm{Div}(V)/div(k(X)^*)$ gdzie $div : k(X) \to \mathrm{Div}(X)$ jest odwzorowaniem klas.

1. Rozpatrzmy właściwy podzbiór domknięty $Z \subset X$ i jego uzupełnienie $U = X \setminus Z$. Pokaż, że ograniczanie do U daje dobrze zdefiniowane odwzorowanie $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(U)$, które jest suriektywne, oraz
   (a) jeśli każda składowa Z jest kowymiaru ≥ 2, to $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(U)$ jest izomorfizmem,
   (b) jeśli $Z \subset X$ jest nieprzywiedlne kowymiaru 1, to mamy ciąg dokładny
   $$\mathbb{Z} \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(U) \to 0$$
   gdzie pierwsze odwzorowanie z lewej jest postaci $1 \mapsto 1 \cdot Z$,
   (c) powyższe stwierdzenia zachodzą również dla grup klas.

2. Dla $n \geq 1$ niech $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ będzie podrozmaitością kowymiaru 1 której ideał jest generowany przez wielomian jednorodny stopnia d. Mówimy wówczas, że Y jest hiperpowierzchnią stopnia d i piszemy $\deg Y = d$.
   (a) Pokaż, że każdy (niekoniecznie nieprzywiedlny) podzbiór algebraiczny w $\mathbb{P}^n_k$, którego każda składowa jest kowymiaru 1, jest zbiorem zer ideału głównego.
   (b) Pokaż, że mamy dobrze zdefinowany homomorfizm stopnia dywizora $\deg : \mathrm{Div}(\mathbb{P}^n_k) \to \mathbb{Z}$ który przyjmuje wartość $\deg Y$ na dywizorach prostych.
   (c) Pokaż, że homomorfizm deg zeruje się na dywizorach głównych.
   (d) Wywnioskuj z tego, że $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}$ jest generowany przez klasę hiperpłaszczyzny.

3. Niech $k(X)$ będzie ciałem wymiaru przestępnego 1 nad ciałem algebraicznie domkniętym k z waluacją dyskretną μ i pierścieniem waluacji A. Wiadomo, że A jest (normalnym, a nawet regularnym) pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $\mathfrak{m}_A$ generowanym przez $t \in A$. Weźmy skończone rozszerzenie $k(X) \subset k(Y)$ stopnia d i przez B oznaczmy całkowite domknięcie A w $k(Y)$. Definiujemy $\mathfrak{n}_B = \mathfrak{m}_A \cdot B = t \cdot B$.

   (a) Pokaż, że B jest wymiaru 1 i jest całkowicie domknięty w $k(Y)$, wobec tego każda jego lokalizacja względem ideału pierwszego jest pierścieniem waluacji $k(Y)$.

   (b) Pokaż, że B jest wolnym A modułem rangi d oraz $B/\mathfrak{n}_B$ jest wymiaru d nad $k = A/\mathfrak{m}_A$. Skorzystaj z lematu Nakayamy, zob. np. [Atiyah-Macdonald, ch. 7 ex. 15].

   (c) Weźmy rozkład prymarny ideału $\mathfrak{n}_B$, czyli minimalne przedstawienie

   $$\mathfrak{n}_B = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$$

   gdzie $\mathfrak{q}_i$ są prymarne, takie że radykały $\mathfrak{m}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ są różne pierwsze, więc maksymalne; ideały $\mathfrak{m}_i$ są wówczas wyznaczone jednoznacznie, zob. [Reid, 7.9] lub [Atiyah-Macdonald, 4.5].

   (d) Pokaż, że wymiar $\dim_k B/\mathfrak{q}_i$ jest równy waluacji t w pierścieniu lokalnym $B_{\mathfrak{m}_i}$.

   (e) Korzystając z twierdzenia chińskiego o resztach pokaż, że

   $$\dim_k B/\mathfrak{q}_1 + \cdots + \dim_k B/\mathfrak{q}_r = d$$

4. Dla dowolnej zupełnej normalnej krzywej X nad ciałem k definiujemy odwzorowanie stopnia $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ takie, że dla $D = \sum a_i p_i$, gdzie $p_i \in X$, kładziemy $\deg(D) = \sum a_i$.

   Rozpatrzmy skończony morfizm zupełnych krzywych normalnych $\phi : Y \to X$; liczbę $d = [k(Y) : k(X)]$ nazwiemy stopniem tego odwzorowania. Dla punktu $p \in X$ z pierścieniem lokalnym A_p, którego ideał maksymalny jest główny $\mathfrak{m}_p = (t)$ definiujemy cofnięcie dywizora $D_p = p$ jako

   $$\phi^*(D_p) = \sum_{q_i \in \phi^{-1}(p)} \mu_{q_i}(t) \cdot q_i$$

   gdzie μ_{q_i} jest waluacją w pierścieniu lokalnym punktu $q_i \in Y$. Pokaż, że tę definicję można rozszerzyć do homomorfizmu $\phi^* : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(Y)$

oraz dla dowolnego $D \in \operatorname{Div} X$ mamy $\deg(\phi^*(D)) = d \cdot \deg(D)$; skorzystaj z poprzedniego zadania, zob. [Hartshorne, II.6.9]