Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 8 na 30 kwietnia.

1. Niech $\varphi\colon A \to B$ będzie homomorfizmem noetherowskich algebr przemiennych. Pokaż, że przeciągnięcie struktury wdłuż φ, czyli zadanie działania algebry A na B modułach poprzez obraz $\varphi(a) \in B$ dla dowolnego elementu $a \in A$, zadaje dokładny funktor $\varphi_*\colon \mathcal{M}od_B \to \mathcal{M}od_A$ oraz, że $\varphi^*(-) = (-) \otimes_A B$ jest prawodokładnym funktorem $\mathcal{M}od_A \to \mathcal{M}od_B$. Czy φ_*, φ^* obcinają się do funktorów pomiędzy kategoriami skończenie generowanych modułów?

2. Niech $f\colon X \to Y$ będzie morfizmem rozmaitości algebraicznych, a $\mathcal{F}$ snopem na X. Definiujemy presnop $f_*\mathcal{F}$ na Y wzorem $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$, dla dowolnego otwatego $U \subset Y$.

   a) Pokaż, że $f_*\mathcal{F}$ jest snopem.
   b) Zdefiniuj naturalny morfizm $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$.
   c) Pokaż, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest snopem $\mathcal{O}_X$ modułów, to $f_*\mathcal{F}$ jest snopem $\mathcal{O}_Y$-modułów.
   d) Załóżmy, że X, Y są afiniczne, $A = k[Y]$, $B = k[X]$, a morfizm f pochodzi od homomorfizmu algebr $\varphi\colon A \to B$. Niech M będzie B-modułem, a $\widetilde{M}$ stowarzyszonym snopem na X. Pokaż, że $f_*\widetilde{M} = \widetilde{\varphi_*M}$.

3. Niech $f\colon X \to Y$ będzie morfizmem rozmaitości algebraicznych, a $\mathcal{G}$ snopem na Y. Definiujemy snop $f^{-1}\mathcal{G}$ jako usnopienie presnopa, który otwartemu $V \subset X$ przyporządkowuje kogranicę

$$f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{U \supseteq f(V)} \mathcal{G}(U).$$

   Pokaż, że f^{-1} jest funktorem lewo dołączonym do f_*.

4. Morfizm rozmaitości algebraicznych $f\colon X \to Y$ zadaje $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, który przy parze funktorów dołączonych $f^{-1} \dashv f_*$ odpowiada morfizmowi $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$.

a) Pokaż, że dla snopa $\mathcal{O}_Y$-modułów $\mathcal{G}$, $f^{-1}\mathcal{G}$ jest snopem $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ modułów, a

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

jest snopem $\mathcal{O}_X$-modułów.

b) Uzasadnij, że na kategorii snopów $\mathcal{O}$-modułów, funktor f^* jest lewo dołączony do f_*.

c) Załóżmy, że X, Y są afiniczne, $A = k[Y]$, $B = k[X]$, a morfizm f pochodzi od homomorfizmu algebr $\varphi\colon A \to B$. Niech N będzie A-modułem, a $\widetilde{N}$ stowarzyszonym snopem na Y. Pokaż, że $f^*\widetilde{N} = \widetilde{\varphi^* N}$. Wywnioskuj, że f^* od snopa (quasi-)koherentnego jest snopem (quasi-)koherentnym.

d) Pokaż, że jeżeli $\mathcal{G}$ jest snopem lokalnie wolnym, to jest nim również $f^*\mathcal{G}$.

5. Znajdź moduł różniczek Kählera dla następujących algebr nad ciałem charakterystyki $\neq 2,\ 3$.

   a) $A = k[x, y]$

   b) $A = k[t^2, t^3] \subset k[t]$

   c)† $A = k[t_1^2, t_1 t_2, t_2^2] \subset k[t_1, t_2]$

   Sprawdź, który z powyższych modułów różniczek jest wolny, a który ma torsje.