Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 7 na 16 kwietnia.

1. Niech $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ będzie morfizmem snopów quasi-koherentnych na rozmaitości X. Pokaż, że jądro i kojądro φ są snopami quasi-koherentnymi.

2. Snopy lokalnie wolne (i wiązki wektorowe): macierze przejścia. Niech $\mathcal{E}$ będzie snopem lokalnie wolnym rangi r nad rozmaitością X. Jeśli snop $\mathcal{E}$ jest trywializowany na pokryciu (U_i) przez izomorfizmy $\varphi_i : \mathcal{E}_{|U_i} \to \mathcal{O}^{\oplus r}_{|U_i}$ to na $U_{ij} = U_i \cap U_j$ definiujemy "macierze przejścia"

$$g_{ij} = (\varphi_i)_{U_{ij}} \circ (\varphi_j)^{-1}_{U_{ij}}$$

gdzie $(\varphi_i)_{U_{ij}} : \mathcal{E}(U_{ij}) \to \mathcal{O}^{\oplus r}(U_{ij})$ jest izomorfizmem $\mathcal{O}(U_{ij})$ modułów. (Podobnie definiujemy macierze przejścia dla wiązki E stowarzyszonej ze snopem $\mathcal{E}$.)

   (a) Sprawdź, że $g_{ij} \in GL(r, \mathcal{O}(U_{ij}))$ i dla każdej trójki indeksów $i,\ j,\ l$ na $U_{ijl} = U_i \cap U_j \cap U_l$ zachodzi $g_{ij} \circ g_{jl} = g_{il}$.

   (b) Zamiana bazy: załóżmy, że $\mathcal{E}$ jest trywializowane również przez $\varphi'_i : \mathcal{E}_{|U_i} \to \mathcal{O}^{\oplus r}_{|U_i}$, które dają macierze przejścia g'_{ij}. Niech $h_i = (\varphi_i)_{U_i} \circ (\varphi'_i)^{-1}_{U_i}$. Pokaż, że $h_i \in GL(r, \mathcal{O}(U_i))$ oraz $h_j g'_{ji} = g_{ji} h_i$.

   (c) Załóżmy, że snopy lokalnie wolne $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ są trywializowane na tym samym pokryciu (U_i) z macierzami przejścia g_{ij} i g'_{ij}. Znajdź macierze przejścia dla snopa $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$.

3. Operacje na snopach modułów. Niech $\mathcal{F}$ i $\mathcal{M}$ będą snopami $\mathcal{O}$ modułów. Przez $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ oznaczamy snop homomorfizmów $U \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{|U}}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{M}_{|U})$, natomiast $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ oznacza snop związany z usnopieniem presnopa $U \to \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{M}(U)$. Podobnie definiujemy inne operacje tensorowe.

   (a) W sytuacji poprzedniego zadania, niech $\mathcal{E}^\vee$ oznacza snop dualny do $\mathcal{E}$ czyli $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{E}, \mathcal{O})$. Pokaż, że $\mathcal{E}^\vee$ jest trywializowany na pokryciu (U_i) i znajdź jego macierze przejścia.

(b) Niech $\mathcal{E}$ będzie jak wyżej: znajdź macierze przejścia dla $det(\mathcal{E}) = \bigwedge^r \mathcal{E}$.

(c) Pokaż, że $U \to \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{M}(U)$ nie zawsze musi być snopem; dokładniej: korzystając z zadania 5 podaj przykład kiedy naturalne odwzorowanie $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{M}(U) \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M})(U)$ nie jest izomorfizmem.

4. Snopy lokalnie wolne rangi 1 (wiązki liniowe), grupa Picarda.

   (a) Niech $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ będą snopami lokalnie wolnymi rangi 1 trywializowanymi na pokryciu (U_i) z funkcjami przejścia f_{ij}^1, $f_{ij}^2 \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, gdzie $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$ oznacza snop funkcji, które nie mają zer (nieznikających). Znajdź funkcje przejścia dla $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ i dla $\mathcal{L}_1^\vee$.

   (b) Pokaż, że snopy lokalnie wolne rangi 1 (lub wiązki liniowe) na rozmaitości X mają naturalną strukturę grupy abelowej ze względu na $\otimes$; nazywamy ją grupą Picarda i oznaczamy $\operatorname{Pic} X$.

5. Pokaż, że snopy $\mathcal{O}(d)$ zdefiniowane na $\mathbb{P}_k^n$ w poprzedniej serii zadań są lokalnie wolne rangi 1 i znajdź ich funkcje przejścia dla standardowego pokrycia $\mathbb{P}^n$.

   (a) Pokaż, że $\mathcal{O}(d)^\vee = \mathcal{O}(-d)$ oraz $\mathcal{O}(d_1) \otimes \mathcal{O}(d_2) = \mathcal{O}(d_1 + d_2)$.

   (b) Znajdź przekroje globalne snopa $\mathcal{O}(d)$, czyli $\mathcal{O}(d)(\mathbb{P}^n)$ dla dowolnego $d \in \mathbb{Z}$. Możesz to zrobić korzystając ze standardowego pokrycia $\mathbb{P}^n$.