**Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019**

**Zadania domowe: seria 6 na 9 kwietnia.**

1. Niech $(X, \mathcal{O})$ będzie rozmaitością afiniczną z algebrą funkcji regularnych $A = \mathcal{O}(X)$. Niech $M$ będzie $A$ modułem (dla ułatwienia można dodatkowo zakładać, że $M$ jest skończenie generowany). Przypomnijmy, że dla zbioru otwartego $U \subset X$ definiujemy $\mathcal{O}(U)$-moduł $\mathcal{M}(U)$ jako

$$\left\{ s : U \to \coprod_{x \in U} M_{\mathfrak{m}_x} : \forall_{x \in U} \exists_{f \in A \setminus \mathfrak{m}_x} \exists_{m \in M}\ U_f \subseteq U\ \&\ \forall_{y \in U_f} s(y) = [m/f]_{M_{\mathfrak{m}_y}} \right\}$$

   (a) Sprawdź, że $U \to \mathcal{M}(U)$ jest snopem $\mathcal{O}$ modułów. (To zostało zrobione na wykładzie na podstawie dwóch lematów: (1) jeśli każda lokalizacja elementu modułu jest zerowa to ten element jest zerem i (2) zgodne elementy w lokalizacjach pochodzą z jednego elementu modułu.)

   (b) Sprawdź, że $\mathcal{M}(U_f) = M_f$, gdzie $U_f = X \setminus V(f)$.

   (c) Sprawdź, że $\mathcal{M}_x = M_{\mathfrak{m}_x}$, gdzie $\mathfrak{m}_x$ jest ideałem maksymalnym odpowiadającym $x \in X$.

   (d) Sprawdź, że $M \to \mathcal{M}$ jest funktorem z kategorii $A$ modułów w kategorię snopów $\mathcal{O}$ modułów: zdefiniuj ten funktor na morfizmach.

   (e) Sprawdź, że funktor $M \to \mathcal{M}$ jest dokładny. To znaczy: jeśli $N \to M \to P$ jest ciągiem dokładnym $A$-modułów, to ciąg snopów $\mathcal{O}$ modułów $\mathcal{N} \to \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ jest dokładny, czyli dla każdego $x \in X$ mamy ciąg dokładny źdźbeł $\mathcal{N}_x \to \mathcal{M}_x \to \mathcal{P}_x$, zob. [Atiyah-Macdonald, Prop. 3.3]

   (f) Pokaż, że powyższy funktor jest wierny i pełny: dowiedź, że globalne przekroje zadają bijekcję pomiędzy $Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ a $Hom_A(M, N)$.

2. W sytuacji poprzedniego zadania i przy założeniu, że $M$ jest skończenie generowany, ranga snopa $\mathcal{M}$ to wymiar lokalizacji $M$ względem elementów odwracalnych w $A$ (lub inaczej $M \otimes_A (A)$) nad ciałem ułamków $(A)$. Pokaż, że jeśli dla pewnego zbioru afinicznego $U \subseteq X$ moduł $\mathcal{M}(U)$ jest generowany nad $\mathcal{O}(U)$ przez $r$ elementów, to ranga $\mathcal{M}$ jest co najwyżej $r$.

3. Dla snopa $\mathcal{O}$ modułów $\mathcal{F}$ i punktu $x \in X$ przez włókno $\mathcal{F}(x)$ rozumiemy $k$ przestrzeń liniową $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} (\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x)$. Pokaż, że w przypadku kiedy $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ jest zdefiniowanym jak wyżej, to $\mathcal{M}(x) = M_{\mathfrak{m}_x} \otimes_{A_{\mathfrak{m}_x}} A/\mathfrak{m}_x$. Wykorzystaj lemat Nakayamy by pokazać, że w tym przypadku wymiar każdego włókna nad $k$ jest nie mniejszy niż ranga snopa $\mathcal{M}$.

4. Przy oznaczeniach z poprzednich zadań znajdź rangę snopa $\mathcal{M}$ i wymiar jego włókien dla następujących modułów:

   (a) $M = k[x]/(x)$ nad $A = k[x]$

   (b) $M = (x, y) \cdot k[x, y] \lhd k[x, y]$ nad $A = k[x, y]$

5. Weźmy pierścień wielomianów z naturalną gradacją $A = \bigoplus_{d \geq 0} A^d = k[x_0, \ldots, x_n]$. Przypomnijmy, że snop strukturalny na $\mathbb{P}^n_k$ definiujemy na zbiorach $U_f$, gdzie $f \in A^m$, jako pierścień elementów stopnia zero w lokalizacji $A$ względem $f$ czyli $\mathcal{O}(U_f) = A^0_f = \{g/f^r : \ g \in A^{rm}\}$. Ustalmy $d \in \mathbb{Z}$ i w tej sytuacji zdefiniujmy

$$\mathcal{O}(d)(U_f) = A^d_f = \{g/f^r : \ g \in A^{rm+d}\}$$

   (a) Pokaż, że $\mathcal{O}(d)(U_f)$ jest $\mathcal{O}(U_f)$ modułem.

   (b) Pokaż, że na zbiorach $U_{x_i}$ (to jest dla $f = x_i$) ten moduł jest wolny rangi 1.

   (c) Pokaż, że $U_f \to \mathcal{O}(d)(U_f)$ rozszerza się do snopa koherentnego $\mathcal{O}(d)$ na $\mathbb{P}^n_k$.