Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 5 na 26 marca.

Indeks przecięcia. Niech $C, D \subset \mathbb{P}^2$ będą podzbiorami domkniętymi kowymiaru jeden zadanymi przez równania stopnii odpowiednio n i m. Istnieje jednoznacznie wyznaczony indeks przecięcia $I_p(C, D)$, taki, że:

(i) $I_p(C, D) = I_p(D, C)$,

(ii) $I_p(C, D) = \infty$, jeżeli p leży na wspólnej składowej C i D. W przeciwnym wypadku, $I_p(C, D) \in \mathbb{N}$,

(iii) $I_p(C, D) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \notin C \cap D$,

(iv) Dwie proste przecinają się z indeksem 1 w ich jedynym punkcie przecięcia,

(v) Jeżeli $C_1 = V(P_1)$, $C_2 = V(P_2)$ i $C = V(P_1P_2)$, to $I_p(C, D) = I_p(C_1, D) + I_p(C_2, D)$ dla dowolnych p i D,

(vi) Jeżeli $C = V(P)$, $D = V(Q)$, dla wielomianów jednorodnych P, Q stopnii n, odpowiednio m, $E = V(PR + Q)$, dla pewnego R stopnia $m - n$, to
$$I_p(C, D) = I_p(C, E).$$

Twierdzenie Bezout. Niech $C, D \subset \mathbb{P}^2$ będą krzywymi algebraicznymi stopnii n i m bez wspólnych składowych. Wtedy

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = nm.$$

1. Niech $p = [0 : 0 : 1]$, $C = V(x^3 + y^3 + 3xyz)$, $D = V(y^2 + xz)$. Oblicz $I_p(C, D)$.

2. Niech $C, D \subset \mathbb{P}^2$ będą krzywymi stopnia n, które przecinają się w dokładnie n^2 punktach. Pokaż, że jeżeli dokładnie nm tych punktów leży na nierozkładalnej krzywej E stopnia $m < n$, to pozostałe $n(n-m)$ punktów leży na krzywej stopnia co najwyżej $n - m$.

3. Sześciokąt Pascala. Sześciokąt w $\mathbb{P}^2$ jest wyznaczony przez swoje wierzchołki – sześć różnych punktów $p_1, \ldots, p_6$ oraz krawędzie – proste łączące p_1 z p_2, p_2 z p_3 i tak dalej, aż do prostej łączącej p_6 z p_1. Mówimy, że sześciokąt jest wpisany w kwadrykę, jeżeli $p_1, \ldots, p_6$ są punktami pewnej krzywej stopnia 2.

   Udowodnij, że jeżeli sześciokąt jest wpisany w kwadrykę, to punkty przecięcia przeciwległych krawędzi leżą na jednej prostej.