Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 4 na 19 marca.

Oznaczenia: współrzędne w przestrzeni afinicznej oznaczamy w nawiasach okrągłych, naprzykład $(z_1, \ldots, z_n)$; współrzędne jednorodne na przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n_k$ to klasy kierunków w $\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\}$, oznaczamy je $[z_0, \ldots, z_n]$.

1. Niech (x, y) będą współrzędnymi w przestrzeni $\mathbb{A}^2_k$ a $[u, v]$ współrzędnymi w $\mathbb{P}^1_k$. Niech $\widehat{\mathbb{A}}^2_k = \{((x, y), [u : v]) \in \mathbb{A}^2_k \times \mathbb{P}^1_k \,|\, xv = uv\}$ i niech $\beta \colon \widehat{\mathbb{A}}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ będzie rzutowaniem.

   (a) Pokaż, że $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$ ma pokrycie dwoma zbiorami otwartymi U_1, U_2 takimi, że $U_i \simeq \mathbb{A}^2_k$.

   (b) Pokaż, że β jest surjekcją i oblicz przeciwobrazy punktów domkniętych w $\mathbb{A}^2_k$.

2. Oznaczenia jak w poprzednim zadaniu.

   (a) Rozpatrzmy odwzorowanie $\alpha_2 : \mathbb{A}^2_k \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1_k$ zadane wzorem $\alpha_2(x, y) = [x, y]$. Pokaż, że $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$ jest domknięciem wykresu α_2 w $\mathbb{A}^2_k \times \mathbb{P}^1_k$.

   (b) Rozpatrzmy odwzorowanie $\alpha_n : \mathbb{A}^n_k \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}_k$ zadane wzorem $\alpha_2(z_1, \ldots, z_n) = [z_1, \ldots, z_n]$. Pokaż, że domknięcie wykresu α_n definiuje rozmaitość $\widehat{\mathbb{A}}^n_k$, którą można zdefiniować przez pokrycie n kopiami $\mathbb{A}^n_k$. Opisz $\widehat{\mathbb{A}}^n_k$ jak w poprzednim zadaniu.

3. Oznaczenia jak z pierwszego zadania; załóżmy ponadto char$k \neq 2,\ 3$. Dla krzywej zadanych równaniem w $\mathbb{A}^2_k$ znajdź jej przeciwobraz w $\widehat{\mathbb{A}}^2_k$ i rozłóż go na składowe nieprzywiedlne; znajdź równania tych składowych.

   (a) $x^3 = y^2$

   (b) $(x + 1) \cdot x^2 = y^2$

   (c) $x^4 = y^3$