Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 3 na 12 marca.

Przypomnijmy, że $\mathbb{P}^n_k$ oznacza zbiór linii w $\mathbb{A}^{n+1}_k$ czyli zbiór punktów w $\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\}$ modulo relacja $(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$, gdzie $\lambda \in k^* = k \setminus \{0\}$. Inaczej mówiąc $\mathbb{P}^n_k$ to zbiór orbit działania k^* na $\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\}$ przez homotetie: $\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

1. Na $\mathbb{P}^n_k$ definiujemy topologię Zariskiego w której zbiorami domkniętymi sa zbiory postaci $V(J)$, gdzie J jest ideałem jednorodnym w $k[x_0, \dots, x_n]$.
   (a) Pokaż, że jest to topologia ilorazowa dla ilorazu $\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_k$
   (b) Pokaż, że z tą topologią $\mathbb{P}^n_k$ jest nieprzywiedlną przestrzenią noetherowską (każdy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych się stabilizuje).
   (c) Pokaż, że zbiory $U_f = \mathbb{P}^n_k \setminus V(f)$, gdzie f jest wielomianem jednorodnym, stanowią bazę tej topologii.

2. Na $\mathbb{P}^n_k$ z topologią Zariskiego τ definiujemy snop $\mathcal{O}$, którego przekroje to funkcje o wartościach w k lokalnie przedstawialne jako elementy lokalizacji. Dokładniej:
$$\mathcal{O}(U) = \left\{ \begin{array}{r} f : U \to k \mid \forall_{x \in U} \exists_{U_g \ni x} \;\; f_{|U \cap U_g} = (h/g^r)_{|U \cap U_g} \\ \text{gdzie } \deg h = r \deg g \end{array} \right\}$$
   Pokaż, że $(\mathbb{P}^n_k, \tau, \mathcal{O})$ jest rozmaitością.

3. Niech C będzie krzywą stopnia trzy w $\mathbb{P}^2_k$ zadaną równaniem $zy^2 = x(x^2 - z^2)$ i niech $P_0 = [0 : 0 : 1] \in C$. Dla $P \in C$ niech l będzie prostą przez P i P_0, a $\alpha(P)$ trzecim punktem $l \cap C$. Pokaż, że $\alpha \colon C \to C$ jest automorfizmem C stopnia 2:
   (a) Pokaż, że na $C \cap (\mathbb{P}^2_k)_z$ α jest zadana przez $(a, b) \mapsto (-1/a, -b/a^2)$.
   (b) Niech $P_2 = [0 : 1 : 0]$, $Q_1 = [1 : 0 : 1]$, $Q_2 = [-1 : 0 : 1]$ i $U_1 = C \setminus \{P_0, P_1\}$, $U_2 = C \setminus \{P_1, Q_1, Q_2\}$, $U_3 = C \setminus \{P_0, Q_1, Q_2\}$, $V_1 = C \setminus \{P_1\}$, $V_2 = C \setminus \{P_0, Q_1, Q_2\}$. Pokaż, że U_1, U_2, U_3 jest otwartym pokryciem C, V_1, V_2 jest afinicznym pokryciem C i $\alpha(U_1) \subset V_1$, $\alpha(U_2) \subset V_2$, $\alpha(U_3) \subset V_1$.
   (c) Pokaż, że $\alpha^* \mathcal{O}_C(V_1) \subset \mathcal{O}_C(U_1) \cap \mathcal{O}_C(U_3)$, $\alpha^* \mathcal{O}_C(V_2) \subset \mathcal{O}_C(U_2)$ i wywnioskuj, że α jest morfizmem.