Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 2 na 5 marca.

Wszystkie rozmaitości afiniczne są zdefiniowane nad algebraicznie domkniętym ciałem k.

Snop funkcji regularnych, albo inaczej snop strukturalny, rozmaitości afinicznej X z pierścieniem funkcji regularnych $k[X]$ i ciałem funkcji wymiernych $k(X) = (k[X])$ zdefiniowany jest następująco

$$\mathcal{O}_X(U)k[X]_\mathfrak{m} = \{f : U \to k \mid \forall_{x \in U} \exists_{x \in U_g} \exists_{h/g^r \in k[X]_g} f_{|U \cap U_g} = (h/g^r)_{|U \cap U_g}\}$$

gdzie dla $g \in k[X]$ oznaczamy $U_g = X \setminus V(g)$.

Przypomnienie: Lokalizacja A modułu M względem systemu multiplikatywnego $S \subset A$ prowadzi do modułu $S^{-1}M$ nad pierścieniem $S^{-1}A$, którego elementami są ułamki m/s gdzie $m \in M$ oraz $s \in S$ i zachodzi równość $m_1/s_1 = m_2/s_2$ o ile istnieje $t \in S$ takie, że $t(s_2m_1 - s_1m_2) = 0$. Oczywiście takie ułamki dodajemy i mnożymy jak trzeba. Jeśli $\mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym to lokalizacje względem $A \setminus \mathfrak{p}$ oznaczamy $M_\mathfrak{p}$. Podobnie, dla $f \in A$ lokalizację względem $S = \{f^r : r \geq 0\}$ oznaczamy M_f.

1. Niech X będzie rozmaitością afiniczną ze snopem strukturalnym $\mathcal{O}_X$. Weźmy funkcję $f \in \mathcal{O}_X(X)$ i rozpatrzmy zbiór otwarty $U_f = X \setminus V(f)$. Pokaż, że U_f z topologią i snopem strukturalnym (funkcji regularnych) indukowanymi z X jest rozmaitością afiniczną.

2. Niech X będzie zbiorem algebraicznym w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}^2_k$, ze współrzędnymi (x_1, x_2), zadanym przez ideał $(x_1^2 - x_2^3)$. Pokaż, że morfizm $\mathbb{A}^1_k \to X \subset \mathbb{A}^2_k$ zadany wzorem $t \longrightarrow (t^3, t^2)$, gdzie t jest współrzędną na $\mathbb{A}^1_k$, zadaje homeomorfizm $\mathbb{A}^1_k$ i X jako przestrzeni topologicznych ale nie izomorfizm jako rozmaitości afinicznych.

3. Niech X będzie rozmaitością afiniczną ze snopem strukturalnym $\mathcal{O}_X$. Dla punktu $x \in X$ rozważmy źdźbło snopa strukturalnego $\mathcal{O}_{X,x}$.

   (a) Pokaż, że $\mathcal{O}_{X,x}$ jest pierścieniem lokalnym.

   (b) Pokaż, że jeśli $\mathfrak{m}_x$ jest ideałem maksymalnym w $\mathcal{O}_{X,x}$ to $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k$ oraz $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ jest $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ modułem.

   (c) Pokaż, że dla $X \subset \mathbb{A}^n_k$ wymiar $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ nad k jest nie większy niż n.

(d) Policz $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ dla $x = (0,0)$ w poprzednim przykładzie.

4. Morfizm Frobeniusa. Załóżmy, że charakterystyka k jest $p > 0$. Na przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_k^n$ mamy współrzędne $(x_1, \dots, x_n)$ i bierzemy odwzorowanie $\phi : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^n$ zadane wzorem $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1^p, \dots, x_n^p)$. Pokaż, że odwzorowanie ϕ jest bijektywne, ciągłe i otwarte ale nie jest izomorfizmem rozmaitości afinicznych.

5. Rozpatrzmy przestrzenie afiniczne $\mathbb{A}_k^n$ i $\mathbb{A}_k^m$ ze współrzędnymi $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\overline{y} = (y_1, \dots, y_m)$. Algebry funkcji wielomianowych będziemy oznaczać odpowiednio przez $k[\overline{x}]$ i $k[\overline{y}]$ natomiast algebrę funkcji wielomianowych na $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^m$ będziemy oznaczać przez $k[\overline{x}, \overline{y}]$.

   (a) Pokaż naturalny izomorfizm $k[\overline{x}, \overline{y}] = k[\overline{x}] \otimes_k k[\overline{y}]$, gdzie prawa strona to produkt tensorowy przestrzeni liniowych nad k z naturalną strukturą k-algebry.

   (b) Niech $V_1 \subset \mathbb{A}_k^n$ i $V_2 \subset \mathbb{A}_k^m$ będą zbiorami algebraicznymi zadanymi przez ideały pierwsze $\mathfrak{p}_1 \triangleleft k[\overline{x}]$ i $\mathfrak{p}_2 \triangleleft k[\overline{y}]$. Pokaż, że zbiór $V_1 \times V_2 \subset \mathbb{A}_k^{n+m}$ jest zadany przez ideał $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cdot k[\overline{x}, \overline{y}] + \mathfrak{p}_2 \cdot k[\overline{x}, \overline{y}]$.

   (c) Pokaż, że
   $$k[\overline{x}, \overline{y}]/\mathfrak{p} \simeq k[\overline{x}]/\mathfrak{p}_1 \otimes_k k[\overline{y}]/\mathfrak{p}_2.$$

   (d) Pokaż, że jeżeli V_1, V_2 są nierozkładalne, to $V_1 \times V_2$ też.

6. Niech X będzie rozmaitością afiniczną z algebrą funkcji regularnych $A = \mathcal{O}_X(X)$. Niech M będzie A modułem. Dla zbioru otwartego $U \subset X$ definiujemy zbiór $\mathcal{M}(U)$ w sposób następujący:

$$\left\{ s : U \to \coprod_{x \in U} M_{\mathfrak{m}_x} : \forall_{x \in U} \exists_{f \in A \setminus \mathfrak{m}_x} \exists_{m \in M}\ U_f \subseteq U \ \&\ \forall_{y \in U_f} s(y) = [m/f]_{M_{\mathfrak{m}_y}} \right\}$$

   (a) Pokaż, że $\mathcal{M}(U)$ na strukturę $\mathcal{O}_X(U)$ modułu oraz $\mathcal{M}(U_f) \simeq \mathcal{O}_X(U_f) \otimes_A M$ (zob. [Atiyah-Macdonald, Prop. 3.5]).

   (b) Pokaż, że $U \to \mathcal{M}(U)$ jest snopem, na którym istnieje naturalna struktura snopa $\mathcal{O}_X$ modułów.

   (c) Pokaż, że jeśli $M = A = \mathcal{O}_X(X)$ to $\mathcal{M}$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}_X$.

   (d) Pokaż, że $M \mapsto \mathcal{M}$ jest funktorem wiernym i pełnym z kategorii A modułów w kategorię snopów $\mathcal{O}_X$ modułów.

7. Niech $M = k[x]/(x)$ będzie $A = k[x]$-modułem. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania znajdź snop $\mathcal{M}$ i jego źdźbła.