**Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019**

---

**Zadania domowe: seria 12 na 11 czerwca.**

1. Niech $\mathcal{L}$ będzie odwracalnym snopem $\mathcal{O}_X$-modułów na rozmaitości $X$, natomiast $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ krótkim ciągiem dokładnym snopów quasi-koherentnych. Pokaż, że skręcony ciąg $0 \to F_1 \otimes \mathcal{L} \to F_2 \otimes \mathcal{L} \to F_3 \otimes \mathcal{L} \to 0$ jest dokładny.

2. Policz $\dim_k \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \Omega(d))$ dla $n \geq 1$, $i = 0, \dots, n$ oraz $d \geq 0$. Wykorzystaj ciąg Eulera skręcony przez $\mathcal{O}(d)$ i zinterpretuj odpowiednie odwzorowanie na poziomie cięć globalnych jako odwzorowanie $A_{d-1} \otimes A_1 \to A_d$, gdzie $A_d$ oznacza pierwszą gradację w pierścieniu współrzędnych jednorodnych $A = k[x_0, \dots, x_n]$ na $\mathbb{P}^n$.

3. Popychanie dywizorów Weila przy odwzorowaniach biwymiernych. Niech $\phi : X \to Y$ będzie suriektywnym odwzorowaniem biwymiernym (rozmaitości normalnych!). Dla dywizora pierwszego $D \subset X$ definiujemy $\phi_*(D) = \phi(D)$ o ile $\phi(D) \subset Y$ jest kowymiaru 1; w przeciwnym wypadku kładziemy $\phi_*(D) = 0$.

(a) Pokaż, że liniowo rozszerzamy takie odwzorowanie do homomorfizmu $\phi_* : \operatorname{Div} X \to \operatorname{Div} Y$, które opuszcza się do homomorfizmu grup klas $\phi_* : \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} Y$.

(b) Niech $Exc_X(\phi) \subset X$ i $Exc_Y(\phi) \subset Y$ to najmniejsze takie zbiory domknięte, że $\phi$ zadaje izomorfizm ich uzupełnień $X \setminus Exc_X(\phi) \simeq Y \setminus Exc_Y(\phi)$. Pokaż, że $Exc_Y(\phi) \subset Y$ jest kowymiaru 2 co najmniej. Wskazówka, dowód niewprost: wybierając składową $Exc_Y(\phi)$ kowymiaru 1 i lokalizując względem tej składowej jesteśmy w sytuacji pierścienia normalnego wymiaru 1 (waluacji dyskretnej).

(c) Załóżmy, że każdy dywizor Weila na $Y$ jest Cartier. Pokaż, że złożenie $\phi_* \circ \phi^*$ jest izomorfizmem na $\operatorname{Cl} Y = \operatorname{Pic} Y$.