Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 11 na 21 maja.

1. W zadaniu 5 serii VI zdefiniowano lokalnie wolne snopy $\mathcal{O}(d)$ na $\mathbb{P}^n_k$. Poniżej stosujemy oznaczenia z tego zadania i z zdania 2 z serii IX; w szczególności $[x_0, \dots, x_n]$ to współrzędne jednorodne na $\mathbb{P}^n$.

(a) Pokaż, że jeśli D jest dywizorem stopnia d na $\mathbb{P}^n$, to $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D) \simeq \mathcal{O}(d)$.

(b) Znajdź funkcje przejścia $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ dla wiązki liniowej związanej z $\mathcal{O}(d)$ i dla pokrycia standardowego $U_i = \{z_i \neq 0\}$. Jeśli H_0 to dywizor hiperpłaszczyzny $x_0 = 0$, to na zbiorze U_i jest on dywizorem funkcji x_0/x_i.

(c) Pokaż, że k-przestrzeń cięć globalnych snopa $\mathcal{O}(d)$ na $\mathbb{P}^n$ jest naturalnie izomorficzna z przestrzenią wielomianów jednorodnych stopnia d od zmiennych x_i.

(d) Rozpatrzmy odwzorowanie Veronese $\phi^{n,d} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, gdzie $N = \binom{n+d}{n} - 1$. Pokaż, że $(\phi^{n,d})^* \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(d)$.

2. W tym zadaniu odwołujemy się do indeksu przecięcia krzywych płaskich I_p zdefiniowanego w serii V. Niech $f \in k[x, y, z]$ będzie nierozkładalnym jednorodnym wielomianem stopnia $d > 1$, bierzemy krzywą płaską $C = V(f) \subset \mathbb{P}^2_k$. Przez $\partial_x f, \partial_y f, \partial_x f$ oznaczamy pochodne cząstkowe f.

(a) Pokaż, że C jest gładka (regularna) w punkcie $p \in C$ jeśli tylko któraś z pochodnych cząstkowych f nie znika w p. Pokaż, że C jest gładka poza skończona liczba punktów.

(b) Pokaż, że modulo zmiana współrzędnych w $\mathbb{P}^2_k$ mozna zakładać, że $p = [1, 0, 0,]$ oraz

$$f = x^{d-1} \cdot g_1(y, z) + x^{d-2} \cdot g_2(y, z) + \cdots + g_d(y, z)$$

gdzie g_i są wielomianami jednorodnymi stopnia i od zmiennych y i z.

(c) Dla gładkiego punktu $p \in C$ weźmy prostą L_p zadaną równaniem

$$\partial_x f(p) \cdot x + \partial_y f(p) \cdot y + \partial_z f(p) \cdot z = 0$$

Taka prostą L_p nazywamy styczną do C w p. Pokaż, że $I_p(C, L_p) > 1$.

(d) Gładki punkt $p \in C$ nazywamy punktem przegięcia C jeśli Hessian f, czyli wyznacznik macierzy drugich pochodnych cząstkowych f, znika w punkcie p; `http://en.wikipedia.org/wiki/Hessian_matrix`. Pokaż, że jeśli p jest punktem przegięcia, to $I_p(C, L_p) > 2$.

(e) Policz punkty przegięcia dla kubiki Fermata $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Sprawdź, że prosta styczna w każdym z tych punktów spotyka kubikę tylko raz. Pokaż, że tak jest dla dowolnej płaskiej gładkiej kubiki (czyli dla $C = V(f)$, gdzie $\deg f = 3$) .

3. Niech C będzie gładką kubiką nad $\mathbb{C}$. Ustalmy punkt przegięcia $p_0 \in C$. Weźmy dwa dostatecznie ogólne punkty $p_1 \neq p_2$. Przez L_{p_1,p_2} oznaczmy prostą przechodząca przez te punkty. Weźmy trzeci punkt w przecięciu $C \cap L_{p_1,p_2}$ nazwijmy go p'_3, natomiast trzeci punkt w przecięciu $C \cap L_{p_0,p'_3}$ nazwijmy p_3. Pokaż, że na punktach C można zdefiniować strukturę grupy – będziemy ją oznaczać $\widehat{C}$ – taką, że

- elementem neutralnym jest p_0,
- elementem przeciwnym do ogólnego p_1 jest trzeci punkt przecięcia $C \cap L_{p_0,p_1}$,
- suma punktów $p_1 + p_2$ to p_3 skonstruowane jak wyżej.

Jedynym problemem jest sprawdzenie łączności wyżej zdefiniowanego działania. Osobom, które bedą miały z tym problem, podaję odnośnik do książki Milesa Reida; trzeba przeczytać podrozdziały 2.8 – 2.10 gdzie to jest zrobione: `http://homepages.warwick.ac.uk/staff/Miles.Reid/MA4A5/UAG.pdf`

4. Przypomnijmy, że dla dowolnego odwzorowania $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ takiego, że X nie jest zawarte w żadnej hiperpłaszczyźnie, definiujemy cofnięcię dywizora Cartier hiperpłaszczyzny H, zwykle oznaczając je $\varphi^* H$ i mamy liniową równoważność $\varphi^* H_1 \sim \varphi^* H_2$ dla dowolnych dwóch hiperpłaszczyzn a snop odwracalny związany z tą klasa liniowej równważności oznaczamy $\varphi^* \mathcal{O}(1)$.

Pokaż następujące własności dla włożenia $\varphi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ w sytuacji i przy oznaczeniach z poprzedniego zadania:

(a) $\varphi^* \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_C(3p_0) = \mathcal{O}_C(p_1 + p_2 + p'_3) = \mathcal{O}_C(p_0 + p'_3 + p_3)$,

(b) wywnioskuj z tego, że $p_1 + p_3 - 2p_0 \sim p_3 - p_0$ na krzywej C.

Korzystając z powyższego sprawdź, że odwzorowanie $C \to \operatorname{Div} C$ takie, że $C \ni p \mapsto p - p_0 \in \operatorname{Div} C$, zadaje homomorfizm grup $\widehat{C} \to \operatorname{Cl} C = \operatorname{Pic} C$, który jest włożeniem w $\operatorname{Pic}^0 C$, jądro odwzorowania $\deg : \operatorname{Pic} C \to \mathbb{Z}$.