Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 10 na 14 maja.

Ćwiczenia zaczniemy od omówienia zadań 2-4 z poprzedniej serii.

1. Dywizory Cartier, wiązki liniowe i snopy wolne rangi 1. Przypomnijmy, ze dywizory Cartier to takie, które są lokalnie główne. Czyli dla dywizora D na rozmaitości X istnieje pokrycie (U_i) i funkcje wymierne (f_i) takie, że $D_{|U_i} = \mathrm{div}(f_i)_{|U_i}$.

(a) Pokaż, że dywizor Cartier zdefiniowany jak wyżej odpowiada przekrojowi snopa ilorazowego $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ zdefiniowanemu na pokryciu (U_i). Snop $\mathcal{K}^*$ to snop (lokalnie stały) niezerowych funkcji wymiernych na X (na każdym otwartym niepustym zbiorze ma wartość $k(X) \setminus \{0\}$) a snop $\mathcal{O}^*$ to funkcje regularne, nigdzie nieznikające, oba mają strukturę grup multiplikatywnych.

(b) Korzystając z ciągu dokładnego

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{K}^* \to \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \to 0$$

pokaż, że dywizory Cartier modulo liniowa równoważność, to to samo co wiązki liniowe modulo izomorfizmy, $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$.

(c) Mając dany dywizor Cartier D, jak wyżej, definiujemy snop

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in k(X) : (\mathrm{div}(f) + D) \geq 0\}$$

Pokaż, że jest to snop $\mathcal{O}_X$-modułów lokalnie wolny rangi 1 i jest izomorficzny ze snopem przekrojów wiązki liniowej odpowiadającej D. Wiązkę liniową odpowiadającą D będziemy często utożsamiać ze snopem jej przekrojów i oznaczać też przez $\mathcal{O}_X(D)$.

2. Nakrycie cykliczne. Charakterystyka ciała jest 0. Dla $m \geq 1$ niech $f \in A = k[x_1, \ldots, x_m]$ będzie wielomianem niepodzielnym przez kwadrat innego nieodwracalnego wielomianu, czyli w jego rozkładzie na czynniki proste wielomianu f każdy wielomian nierozkładalny występuje tylko jednokrotnie.

   Weźmy rozmaitość $X \subset \mathbb{A}^m_k \times \mathbb{A}^1_k$ zdefiniowaną równaniem $f(x_1, \ldots, x_m) - z^n = 0$, gdzie $n \geq 2$.

(a) Pokaż, że wielomian $f(x_1, \ldots, x_m) - z^n$ jest nierozkładalny (pierwszy) więc X jest rozmaitością.

(b) Pokaż, że rozkład $k[X]$ jako wolnego A-modułu:

$$k[X] = \bigoplus_{i=0}^{n-1} z^i \cdot A$$

daje strukturę pierścienia z gradacją w grupie cyklicznej $\mathbb{Z}_n$.

(c) Niech ϵ_n bedzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z jedynki. Pokaż, że kładąc $\epsilon_n(z) = \epsilon_n \cdot z$ definiujemy na $k[X]$ działanie grupy cyklicznej generowanej przez ϵ_n zgodne z mnożeniem i powyższym rozkładem.

(d) Pokaż, że powyższe działanie rozszerza się do działania grupy cyklicznej $\langle \epsilon_n \rangle$ jako grupy Galois rozszerzenia ciał

$$(A) = k(x_1, \ldots, x_m) \subset k(X)$$

(e) Niech $\overline{A} \subset k(X)$ oznacza całkowite domknięcie A w $k(X)$. Pokaż, że pierścień $\overline{A}$ jest zachowywany przez działanie $\langle \epsilon_n \rangle$ oraz rozkłada się na podprzestrzenie własne działania $\langle \epsilon_n \rangle$ czyli

$$\overline{A} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \overline{A} \cap z^i \cdot (A)$$

(f) Pokaż, że $\overline{A} \cap z^i \cdot (A) = z^i \cdot A$ więc $\overline{A} = k[X]$. Wywnioskuj z tego, że pierścień $k[X]$ jest całkowicie domknięty w swoim ciele ułamków czyli X jest rozmaitością normalną.