Geometria Algebraiczna, Wiosna 2019

Zadania domowe: seria 1 na 26 lutego.

Zadania 1-11 to powtórzenie podstawowych pojęć z teorii kategorii. Zapewne rozwiązywali Państwo te zadania wcześniej, dlatego nie będą one omawiane na ćwiczeniach. Na pierwszych zajęciach skoncentrujemy się na zadaniach 12-17 i to rozwiązania tych zadań proszę przygotować.

Najpierw definicje, które najprawdopodobniej Państwo znają.

Kategoria. Kategoria $\mathcal{C}$ to klasa obiektów $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ oraz klasa morfizmów: dla każdej pary obiektów A, B z $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ mamy dany zbiór morfizmów $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które zapisujemy jako strzałki $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni f : A \to B$. Morfizmy można składać czyli istnieje operacja $\circ_{\mathcal{C}}$:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \ni (f, g) \longrightarrow g \circ_{\mathcal{C}} f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

Składanie morfizmów jest łączne oraz w zbiorze $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ mamy wyróżniony morfizm identyczności id_A, który jest neutralny dla operacji składania.

Kategoria odwrotna $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ma tę samą klasę obiektów, co kategoria $\mathcal{C}$. Dla dowolnej pary obiektów A, B z $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ mamy $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Składanie w $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ jest wyznaczone przez składanie w $\mathcal{C}$.

Funktor. To "homomorfizm kategorii" $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, a dokładniej odwzorowanie objektów $\Phi_{\mathrm{Obj}} : \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Obj}_{\mathcal{D}}$ oraz morfizmów: zachowujące kierunek strzałek $\Phi_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathrm{Obj}}(A), \Phi_{\mathrm{Obj}}(B))$ (czyli funktor kowariantny) lub je odwracające $\Phi_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathrm{Obj}}(B), \Phi_{\mathrm{Obj}}(A))$ (czyli funktor kontrawariantny). Zakładamy, że funktory przeprowadzają identyczności na identyczności oraz są zgodne ze składaniem morfizmów. Funktor $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazywamy wiernym (odpowiednio, pełnym) jeśli odwzorowanie na strzałkach $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathrm{Obj}}(A), \Phi_{\mathrm{Obj}}(B))$ jest injekcją (surjekcją).

Naturalna transformata funktorów. Załóżmy, że mamy dwa kowariatne funktory $\Phi,\ \Psi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Naturalna transformata funktorów $\mu : \Phi \to \Psi$ jest zadana przez klasę morfizmów $\mu_A : \Phi_{\mathrm{Obj}}(A) \to \Psi_{\mathrm{Obj}}(A)$, gdzie $A \in \mathcal{C}$, które dla każdej pary $A, B \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ i $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ spełniają warunek przemienności

$$\begin{tikzcd}
\Phi_{\mathrm{Obj}}(A) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{Mor}}(f)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \Phi_{\mathrm{Obj}}(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\
\Psi_{\mathrm{Obj}}(A) \arrow[r, "\Psi_{\mathrm{Mor}}(f)"] & \Psi_{\mathrm{Obj}}(B)
\end{tikzcd}$$

Jeśli dodatkowo każde μ_A jest izomorfizmem to mówimy, że μ jest naturalną równoważnością (lub izomorfizmem) funktorów. Takie same definicje stosujemy dla funktorów kontrawariantnych.

Izomorfizm i równoważność kategorii. Kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są izomorficzne o ile istnieją funktory $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $\Psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takie, że $\Phi \circ \Psi$ oraz $\Psi \circ \Phi$ są funktorami identyczności na, odpowiednio, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{C}$. Kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są równoważne o ile istnieją funktory Φ i Ψ takie, że $\Phi \circ \Psi$ oraz $\Psi \circ \Phi$ są naturalnie równoważne z funktorami identyczności.

Granica prosta i odwrotna w kategorii. Rozpatrzmy kategorię I oraz funktor $I \to \mathcal{C}$ gdzie przyporzadkowanie obiektów oznaczamy $I \ni i \to A_i \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ a dla $\alpha\colon i \to i'$ przyporządkowujemy morfizm $\phi_\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_i, A_{i'})$. Granicą odwrotną systemu obiektów $(A_i)_{i\in I}$ (z indukowanymi morfizmami) nazywamy obiekt $D \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ wraz z morfizmami $\psi_i : D \to A_i$ takimi, że dla każdego $\phi_\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_i, A_{i'})$ mamy $\psi_{i'} = \phi_\alpha \circ \psi_i$. Zakładamy przy tym, że D jest obiektem końcowym spełniającym ten warunek, czyli jeśli D' spełnia warunek jak wyżej dla D to istnieje morfizm $D' \to D$ taki, że odpowiednie złożenia są przemienne. Granicę odwrotną oznaczamy $\varprojlim A_s$. Granica prosta jest zdefiniowana podobnie, przez odwrócenie strzałek i jest oznaczana $\varinjlim A_s$.

Presnop. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Presnopem zbiorów $\mathcal{S}$ (grup abelowych, przestrzeni) na X nazywamy funkcję $\tau \ni U \to \mathcal{S}(U)$ przyporządkowującą zbiorowi otwartemu U zbiór (grupę abelową, przestrzeń wektorową) $\mathcal{S}(U)$. Ponadto dla każdej pary zbiorów otwartych $U \subseteq V$ mamy odwzorowanie (homomorfizm) $r_{VU} : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(U)$ takie, że dla każdej trójki $U \subseteq V \subseteq W$ zachodzi $r_{VU} \circ r_{WV} = r_{WU}$. Elementy zbioru $\mathcal{S}(U)$ nazywamy cięciami $\mathcal{S}$ nad U, natomiast odwzorowanie r_{VU} nazywamy zawężaniem (obcinaniem) cięć ze zbioru V do zbioru U.

Snop. Presnop $\mathcal{S}$ nazywamy snopem jeśli dla dowolnego pokrycia $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ zbioru $V = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ i rodziny cięć $s_\alpha \in \mathcal{S}(U_\alpha)$ takich, że dla każdej pary indeksów $\alpha, \beta \in \Lambda$ zachodzi

$$r_{U_\alpha, U_\alpha\cap U_\beta}(s_\alpha) = r_{U_\beta, U_\alpha\cap U_\beta}(s_\beta)$$

istnieje dokładnie jedno cięcie $s \in \mathcal{S}(V)$ takie, że $r_{VU_\alpha}(s) = s_\alpha$, dla każdego $\alpha \in \Lambda$.

1. Pokaż, że zbiory oraz struktury algebraiczne (grupy, grupy abelowe, pierścienie przemienne, przestrzenie wektorowe nad ustalonym ciałem k itd) i przestrzenie topologiczne wraz z ich odwzorowaniami, odpowiednimi homomorfizmami, tworzą kategorie. Oznaczamy je $\mathcal{S}et$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing$, $\mathcal{V}ect_k$, $\mathcal{T}op$ itd. Pokaż, że zapominanie o operacjach algebraicznych daje funktor pomiędzy odpowiednimi kategoriami (funktor zapominania).

2. Pokaż, że kategoria z jednym obiektem jest monoidem (półgrupą z jednością), a funktory takich kategorii to ich homomorfizmy.

3. Zdefiniuj izomorfizm obiektów oraz odwrotność morfizmu w sposób kategoryjny.

4. Dla przestrzeni topologicznej (X, τ) zdefiniuj częściowy porządek, którego elementami są pokrycia otwarte $\mathcal{U}$ przestrzeni X; $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

5. Niech $(S, \leq)$ bedzie zbiorem z częściowym porządkiem. Pokaż, że $(S, \leq)$ definiuje kategorię, której obiektami są elementy z S a morfizmami nierówności pomiędzy nimi.

6. Niech $\mathcal{C}$ bedzie kategorią z wyróżnionym obiektem A. Pokaż, że odwzorowanie $B \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ oraz

   $$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \ni f \longrightarrow (\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni g \to f \circ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)\ )$$

   definiuje kowariantny funktor z $\mathcal{C}$ w kategorię zbiorów $\mathcal{S}et$. Oznaczamy go przez $\mathfrak{h}_A$. Zdefiniuj podobnie funktor kontrawariantny $\mathfrak{h}^A \colon B \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

7. Pokaż, że morfizm $A' \to A$ daje naturalną transformatę funktorów $\mathfrak{h}_A \to \mathfrak{h}_{A'}$ i $\mathfrak{h}^{A'} \to \mathfrak{h}^A$.

8. Produkt kategoryjny $A,\ B \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ to obiekt D z dwoma morfizmami $A \leftarrow D \to B$ takimi, że dla dowolnego obiektu D', który ma morfizmy

$A \leftarrow D' \rightarrow B$ istnieje dokładnie jeden morfizm z D' do D, który daje następujący przemienny diagram

$$\begin{tikzcd}
 & D' \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[d, dotted, "\exists!"] & \\
 & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Produkt D oznaczamy, o ile nie spowoduje to konfuzji, przez $A \times B$. Ko-produkt definiujemy przez odwrócenie strzałek. Pokaż, że tak zdefiniowany produkt jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż, że produkty są przemienne, to jest $A \times B$ jest izomorficzne z $B \times A$. Opisz produkty i koprodukty w kategoriach $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{R}ing$ (zauważ, że niekoniecznie muszą istnieć).

9. Załóżmy, że w kategorii $\mathcal{C}$ mamy trzy obiekty z następującymi dwoma strzałkami $A \rightarrow C \leftarrow B$. Produktem włóknistym A i B nad C nazywamy obiekt D z morfizmami $A \leftarrow D \rightarrow B$, które dają następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

Ponadto zakładamy, że o ile obiekt D' spełnia powyższy warunek dla D to mamy dokladnie jeden morfizm $D' \rightarrow D$, który można wstawić w następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[dr, dotted, "\exists!"] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\
 & D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
 & A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

Tak zdefiniowany produkt włóknisty (o ile wiemy, gdzie jest zdefiniowany) zwykle oznaczamy przez $A \times_C B$. Ko-produkt włóktnisty definiujemy przez odwrócenie strzałek. Pokaż, że tak zdefiniowany produkt (i ko-produkt) jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Opisz produkty i koprodukty włókniste w kategoriach $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$.

10. Czy funktor zapominania jest przemienny z produktem (koproduktem)?

11. Pokaż, że produkt (koprodukt) i produkt (koprodukt) włóknisty jest szczególnym przykładem granicy odwrotnej i prostej.

12. Niech A będzie dziedziną z ustalonym ideałem pierwszym $\mathfrak{p}$. Na zbiorze $A \setminus \mathfrak{p}$ ustalamy częściowy porządek $b' \leq b \Leftrightarrow b' \mid b$. Jeśli $A_b = \{a/b^r : a \in A, r \geq 0\} \subset (A)$ to dla $b' \mid b$ mamy $A_{b'} \hookrightarrow A_b$. Znajdź granicę prostą systemu $(A_b)_{b \in A \setminus \mathfrak{p}}$.

13. Niech $\mathcal{S}$ będzie presnopem zbiorów (grup abelowych, pierścieni) na przestrzeni topologicznej (X, τ). Dla $x \in X$, niech τ_x oznacza klasę podzbiorów otwartych X zawierających punkt x, z porządkiem wyznaczonym przez inkluzję. Pokaż, że istnieje granica prosta systemu $(\mathcal{S}(U))_{U \in \tau_x}$. Nazywamy ją źdźbłem presnopa $\mathcal{S}$ w punkcie x i oznaczamy $\mathcal{S}_x$. Klasę cięcia $s \in \mathcal{S}(U)$ w źdźble $\mathcal{S}_x$ dla punktu $x \in U$ oznaczamy s_x i nazywamy kiełkiem s w x.

14. Niech $\mathcal{S}$ będzie presnopem zbiorów (grup abelowych, pierścieni) na przestrzeni topologicznej (X, τ). Dla pokrycia otwartego $\mathcal{U} = \{U_i\}$ przestrzeni X niech

$$H^0(\mathcal{U}, S) = \{(s_i)_i \in \prod \mathcal{S}(U_i) \mid s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ dla każdej pary } (i, j)\}.$$

Niech $\mathcal{J}$ będzie kategorią pokryć otwartych X. Pokaż, że $\mathcal{U} \mapsto H^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ zadaje funktor $\mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ ($\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing$).

15. Niech $U \subset X$ będzie podzbiorem otwartym przestrzeni topologicznej X, a $\mathcal{J}_U$ niech będzie kategorią pokryć otwartych U. Presnop $\mathcal{S}$ na X wzynacza presnop $\mathcal{S}|_U$ taki, że dla każdego $V \subset U$ otwartego $\mathcal{S}|_U(V) = \mathcal{S}(V)$. Pokaż, że $\mathcal{S}^+(U) := \varinjlim_{\mathcal{J}_U^{\mathrm{op}}} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}|_U)$ istnieje. Pokaż, że $U \mapsto \mathcal{S}^+(U)$ jest presnopem na X i że istnieje morfizm presnopów $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^+$.

16. Pokaż, że presnop $\mathcal{S}^+$ na X jest separowalny, to znaczy dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X$ i pokrycia otwartego $\mathcal{V} = \{V_i\}$ zbioru U odwzorowanie $\mathcal{S}^+(U) \to \prod \mathcal{S}^+(V_i)$, $s \mapsto s|_{V_i}$ jest monomorfizmem.

17. Pokaż, że jeżeli $\mathcal{S}$ jest separowalny, to morfizm $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^+$ jest injektywny, tzn. dla dowolnego $U \subset X$ otwartego, $\mathcal{S}(U) \to \mathcal{S}^+(U)$ jest włożeniem. Pokaż, że jeżeli $\mathcal{S}$ jest separowalny, to $\mathcal{S}^+$ jest snopem. Wywnioskuj, że dla dowolnego presnopa $\mathcal{S}$, presnop $\mathcal{S}^{++}$ jest snopem.