Funkcje analityczne, seria 9 Jesień 2017

W ramach przygotowań do kolokwium wybrałem zadania z różnych tematów. Wrócimy również do zadań z poprzednich serii, których nie udało nam się zrobić z braku czasu: proszę przygotować i zgłosić te, które Państwo będą chcieli zrobić.
Jak zwykle proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Znajdź obraz dysku $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ przy funkcji
$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$
Czy f wyznacza biholomorfizm Ω_1 na jego obraz? Odpowiedz na te same pytania dla f na uzupełnieniu domknięcia Ω_1 czyli dla $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

2. Pokaż, że istnieje gałąź pierwiastka dla funkcji f zdefiniowanej na $U \subset \mathbb{C}$ poniżej, czyli istnieje holomorficzna funkcja g taka, że $g^2 = f$. Czy powyższa teza będzie prawdziwa dla wyższych pierwiastków, czyli czy istnieje funkcja g taka, że $g^n = f$, $n \geq 3$?
   (a) $f(z) = (1-z)/z$ na $U = \mathbb{C} \setminus [0,1]$,
   (b) $f(z) = 1 - z^2$ na $U = \{z : |z| < 1\}$,
   (c) $f(z) = 1 - z^2$ na $U = \{z : |z| > 1\}$.
   (d) $f(z) = z/(1-z)^2 + 1/4$ na $U = \{z : |z| < 1\}$.

3. Dla podanej poniżej drogi $\gamma : I \to \mathbb{C}$ i funkcji f podaj obszar Ω zawierający obraz γ taki, że f ma na nim funkcję pierwotną i korzystając z tego policz całkę $\int_\gamma f(z)dz$.
   (a) $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$, $I = [-\pi/2, \pi/2]$, $\gamma(t) = 2e^{it}$,
   (b) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, $I = [-\pi/2, \pi/2]$, $\gamma(t) = 2e^{it}$,
   (c) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, $I = [-\pi/2, 3\pi/2]$,
      - $\gamma(t) = e^{it} - i$ dla $t \in [-\pi/2, \pi/2]$,
      - $\gamma(t) = -e^{it} + i$ dla $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$,

4. Pokaż, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi tożsamość

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos t} \cos(a \sin t) dt = 2\pi$$

Wykorzystaj formułę całkową Cauchy'ego, z której wynika

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$$

dla odpowiedniej pętli γ i dowolnego $a \in \mathbb{C}$.

5. Pokaż następującą silną wersję twierdzenia Liouville'a: Jeśli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją homolorficzną taką, że zbiór $f(\mathbb{C})$ nie jest gęsty w $\mathbb{C}$, to f jest stała.

6. Wykazać, że w żadnym z poniższych przypadków nie istnieje funkcja f_i holomorficzna w otoczeniu zera spełniająca podany warunek

   (a) $f_1(1/n) = f_1(-1/n) = 1/n^5$, dla $n \in \mathbb{Z}_{>0}$;

   (b) $f_2(1/n) = e^{-n}$, dla $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.