Funkcje analityczne, seria 8 Jesień 2017

Wskazówki do większości zadań można znaleźć w zbiorze Jana Krzyża. Proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości. Przypomnienie: wzór Cauchy'ego na n-tą pochodną funkcji f holomorficznej w okolicy punktu $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

gdzie γ jest pętlą obiegającą z_0, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ oraz $0 < r \ll 1$.

1. Niech Ω będzie dyskiem o środku w z_0 i promieniu R. Załóżmy, że funkcja f jest holomorficzna na pewnym otoczeniu Ω. Rozpatrzmy wielomian $h(z) = (z - a_1)^{d_1} \cdots (z - a_n)^{d_n}$ z zerami krotności $d_1, \ldots, d_n$ w różnych punktach $a_1, \ldots, a_n$ należących do wnętrza dysku Ω. Znajdź wzór na całkę funkcji $f(z)/h(z)$ po pętli $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, czyli
$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{h(z)}$$

2. Policz następującą całkę po pętli $\gamma_r(t) = r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ w zależności od dodatniego $r \neq 1, 2$
$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{z(z-1)^2(z-2)^3}$$

3. Załóżmy, że funkcja f jest holomorficzna na kole o promieniu R z wyjętym punktem środkowym z_0, czyli na $\Omega = \{z : |z - z_0| \in (0, R)\}$. Pokaż, że dla każdej pętli $\gamma(t) = re^{it} + z_0$, $t \in [0, 2\pi]$, zawartej w Ω (czyli $r \in (0, R)$) zachodzi następująca równość
$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma f(z)dz = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) \cdot f(z)]$$
o ile granica po prawej stronie istnieje.

4. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania załóżmy dodatkowo, że $\lim_{z \to z_0}[(z - z_0) \cdot f(z)] = 0$ i ponadto granica $\lim_{z \to z_0} f(z)$ istnieje i jest liczbą zespoloną a. Pokaż, że kładąc $f(z_0) = a$ można rozszerzyć f do funkcji holomorficznej na $\Omega \cup \{z_0\}$.

5. Policz całkę

$$\int_\gamma \frac{dz}{e^z - 1}$$

po pętli $\gamma_r(t) = r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, dla dodatniego $r \neq 2m\pi i$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

6. Policz całkę

$$\int_\gamma \frac{\sin iz \cdot dz}{e^{iz} - 1}$$

po pętli $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.