Funkcje analityczne, seria 7 Jesień 2017

Tym razem zdecydowanie mniej zadań bo będziemy też robić zadania z poprzedniej serii, których nie zrobiliśmy z braku czasu. Przypominam, że wskazówki do większości zadań można znaleźć w zbiorze Jana Krzyża. Proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Korzystając z rozkładu funkcji wymiernych na ułamki proste i ze wzoru całkowego Cauchy'ego policz następujące całki po brzegu okręgu o środku w 0 i promieniu $r = 2$.

   (a)
   $$\int_\gamma \frac{dz}{z^5 + 4z}$$

   (b)
   $$\int_\gamma \frac{zdz}{z^3 - 1}$$

2. Załóżmy, że f jest funkcją holomorficzną na $\mathbb{C}$. Dla ustalonych $a, b \in \mathbb{C}$ weźmy $R > |a|, |b|$ i niech $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, będzie parametryzacją okręgu o środku w 0 i promieniu R.

   (a) Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego pokaż
   $$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i \cdot (f(a) - f(b))}{a - b}$$

   (b) Korzystając z powyższej równości pokaż twierdzenie Liouville'a: każda funkcja homolorficzna na $\mathbb{C}$, której moduł jest ograniczony, jest stała.