Funkcje analityczne, seria 6 Jesień 2017

Wskazówki do większości zadań można znaleźć w zbiorze Jana Krzyża. Proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

Przypomnienie: jeśli $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą w $\mathbb{C}$ (funkcją ciągłą, kawałkami różniczkowalną) a $f : U \to \mathbb{C}$ funkcją o wartościach zespolonych określoną na pewnym otoczeniu obrazu γ to całki po γ, zorientowaną i niezorientowaną, definiujemy tak:

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \quad \text{oraz} \quad \int_\gamma f(z)|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

1. Pokaż, że jeśli $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą w $\mathbb{C}$ a $f : U \to \mathbb{C}$ funkcją o wartościach zespolonych określoną na pewnym otoczeniu obrazu γ to
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz|$$

2. Policz całkę
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}$$
dla każdej z dróg γ z -2 do 2 zdefiniowanych następująco
   (a) $\gamma(t) = 2(\sin t + i\cos t)$ dla $t \in [-\pi/2, \pi/2]$,
   (b) $\gamma(t) = 2(\sin t - i\cos t)$ dla $t \in [-\pi/2, \pi/2]$,
   (c) $\gamma(t) = (\cos 2t - 1) + i\sin 2t$ dla $t \in [-\pi/2, 0]$ i
   $\gamma(t) = (-\cos 2t + 1) + i\sin 2t$ dla $t \in [0, \pi/2]$,
   (d) $\gamma(t) = (\cos 2t - 1) - i\sin 2t$ dla $t \in [-\pi/2, 0]$ i
   $\gamma(t) = (-\cos 2t + 1) - i\sin 2t$ dla $t \in [0, \pi/2]$.

3. Dla każdej drogi γ z poprzedniego zadania wskaż obszar zawierający obraz γ na którym funkcja $(z^2-1)^{-1}$ ma funkcję pierwotną.

4. Rozpatrzmy wielomian f stopnia n o współczynnikach zespolonych $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$. Policz całkę $\int_\gamma \overline{f(z)}dz$ gdzie $\gamma(t) = \cos t + i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

5. Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ będzie drogą zamkniętą leżącą poza dyskiem jednostkowym, czyli taką że $\forall t \quad |\gamma(t)| > 1$. Pokaż, że

$$\int_\gamma \frac{zdz}{z^2 - 1} = \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

6. Wyznacz możliwe wartości całki

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2}$$

   przy założeniu, że $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}$ jest drogą zamkniętą taką, że

   - $|\gamma(t)| < 1$ dla $t \in (0, 1)$
   - $\gamma(t) = t$ dla $t \in [1, 2]$
   - $|\gamma(t)| > 2$ dla $t \in (2, 3)$
   - $\gamma(t) = t - 5$ dla $t \in [3, 4]$

7. Niech f będzie funkcją holomorficzna na obszarze wypukłym Ω taką, że dla $z \in \Omega$ zachodzi $\mathrm{Re}(f'(z)) > 0$. Pokaż, że f jest różnowartościowa.