Funkcje analityczne, seria 5 Jesień 2017

Wskazówki do większości zadań można znaleźć w zbiorze Jana Krzyża. Proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

Przypomnienie: jeśli $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą w $\mathbb{C}$ (funkcją ciągłą, kawałkami różniczkowalną) a $f : U \to \mathbb{C}$ funkcją o wartościach zespolonych określoną na pewnym otoczeniu obrazu γ to całkę f wzdłuż γ definiujemy następująco:

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

1. Niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną określoną na zbiorze otwartym U taką, że obraz $f(U)$ jest zawarty w prostej lub w pewnym okręgu. Pokaż, że f jest funkcją stałą.

2. Mówimy, że na obszarze (zbiorze otwartym i spójnym) U istnieje gałąź pierwiastka z funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ jeśli istnieje funkcja $g : U \to \mathbb{C}$ taka, że $\forall z \in U : \ (g(z))^2 = f(z)$. Pokaż, że istnieje gałąź pierwiastka z f na U jak poniżej:

   (a) $U = \mathbb{C} \setminus [-i, +i]$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$,
   (b) $U = \mathbb{C} \setminus [a, b]$, $f(z) = \frac{z-a}{z-b}$, gdzie $a < b$ są dowolne rzeczywiste.

3. Rozpatrzmy parametryzację okręgu jednostkowego $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dana wzorem $\gamma(t) = \exp(it) = \cos t + i \sin t$. Korzystając z tej parametryzacji policz bezpośrednio z definicji następujące całki:

   (a) $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz$, $\int_\gamma \mathrm{Im}(z)dz$,
   (b) $\int_\gamma \overline{z}dz$, $\int_\gamma |z|dz$,
   (c) $\int_\gamma z^n dz$, gdzie $n \geq 0$,
   (d) $\int_\gamma z^{-1}dz$,
   (e) $\int_\gamma z^n dz$, gdzie $n \leq -2$

4. Niech $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}$ będzie parametryzacją brzegu kwadratu o wierzchołkach $1, i, -1, -i$, czyli

$$\begin{array}{lll} \text{dla} & t \in [0,1] & \gamma(t) = (1-t) + ti \\ \text{dla} & t \in [1,2] & \gamma(t) = (1-t) + (2-t)i \\ \text{dla} & t \in [2,3] & \gamma(t) = (t-3) + (2-t)i \\ \text{dla} & t \in [3,4] & \gamma(t) = (t-3) + (t-4)i \end{array}$$

Policz całkę $\int_\gamma z^{-1}dz$ bezpośrednio z definicji.

5. [usunięte]

6. Pokaż, że funkcja $f(z) = z^{-1}$ nie ma funkcji pierwotnej na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ale ma funkcję pierwotną na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Wykorzystaj własności funkcji exp.

7. Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ będzie drogą (niekoniecznie zamkniętą) a $g : U \to \mathbb{C}$ funkcją ciągłą zdefiniowana na pewnym otoczeniu obrazu γ. Pokaż, że funkcja $f : \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ zdefiniowana wzorem

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} dw$$

jest holomorficzna i jej pochodna jest równa

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z)^2} dw$$