Funkcje analityczne, seria 4 Jesień 2017

Odwzorowanie biholomorficzne to holomorficzna bijekcja, która ma holomorficzną odwrotność. Wskazówki do większości zadań można znaleźć w zbiorze Jana Krzyża. Proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Rozpatrzmy homografię $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$ oraz odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ zadane wzorem

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$$

   (a) Pokaż, że $h(f(z)) = h(z)^2$ z czego wynika $f(z) = h^{-1}(h(z)^2)$.

   (b) Pokaż, że f odwzorowuje biholomorficznie górną półpłaszczyznę $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| \geq 1\}$.

   (c) Pokaż, że f odwzorowuje biholomorficznie otwarte koło jednostkowe, czyli $\{z : |z| < 1\}$, na zbiór $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq 1\}$.

2. Rozpatrzmy funkcję $f(z) = z + z^{-1} - 2$ i zbiór $\Omega = \{z : |z| > 1\} \setminus (-\infty, -1)$.

   (a) Pokaż, że f przekształca Ω biholomorficznie na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   (b) Pokaż, że $\sqrt{f}$ jest dobrze zdefiniowane na Ω i przekształca Ω biholomorficznie na półpłaszczyznę $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

3. Pokaż, że istnieje odwzorowanie biholomorficzne pomiędzy kołem otwartym $\{z : |z| < 1\}$ i kołem otwartym z wyjętym promieniem $\{z : |z| < 1\} \setminus (-1, 0]$.

4. Rozpatrzmy półpłaszczyznę otwartą $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ i półkole otwarte $\{z : \mathrm{Re}(z) < 0 \ \&\ |z| < 1\}$.

   (a) Pokaż, że istnieje odwzorowanie biholomorficzne między tymi dwom obszarami.

   (b) Pokaż, że nie ma homografii przekształcającej jeden z tych obszarów na drugi.

5. Dla $z = x + iy$ rozstrzygnij istnienie funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takiej, że $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Jeśli funkcja hololorficzna f istnieje, to ją przedstaw jako funkcję od zmiennej z, jeśli nie, to uzasadnij dlaczego:

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy - 3x$

(b) $v(x, y) = x^2 - y^2 + xy + 3y$

6. Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i}}$$