Funkcje analityczne, seria 3 Jesień 2017

1. Pokaż, że każda homografia przekształcająca koło jednostkowe $\{z : |z| < 1\}$ na siebie jest postaci
$$z \longrightarrow \lambda \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$
gdzie a i λ są zespolone oraz $|a| < 1$, $|\lambda| = 1$.

2. Dla niżej podanych funkcji $z = x + iy \longrightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ wypisz równania Cauchy-Riemanna oraz znajdź zbiór gdzie f jest różniczkowalna w sposób zespolony:
   (a) $f(z) = x^2 - y^2 + ixy$
   (b) $f(z) = x^3 - xy^2 + i(x^2y - y^3)$
   (c) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}^3$
   (d) $f(z) = \cos x + i \sin y$

3. Znajdź obraz następujących zbiorów przy odzworowaniu kwadratowym $z \mapsto z^2$:
   (a) półpłaszczyzny $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$
   (b) prostej $\{z : \mathrm{Re} z = 1\}$

4. Funkcję
$$z \longrightarrow \frac{z}{(1-z)^2}$$
przedstaw jako złożenie homografii i funkcji kwadratowej i następnie pokaż, że jest ona różnowartościowa na kole $\{z : |z| < 1\}$. Znajdź obraz tego koła.

5. Znajdź obraz następujących zbiorów przy odzworowaniu wykładniczym $z \mapsto e^z$:
   (a) prostej poziomej $\{z : \mathrm{Im} z = c\}$
   (b) prostej pionowej $\{z : \mathrm{Re} z = c\}$
   (c) pasa $\{z : \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}$
   (d) prostej $y = ax + b$, gdzie $z = x + iy$

6. Znajdź część rzeczywistą i urojoną funkcji $\sin z$ i $\cos z$, czyli zapisz je w postaci $u(x,y) + iv(x,y)$