Funkcje analityczne, seria 2 Jesień 2017

Proszę przygotować również dwa ostatnie zadania z poprzedniej serii, których nie zdążyliśmy zrobić na ćwiczeniach.

1. Znajdź obraz koła $\{z : |z| \leq 1\}$ przy następujących homografiach:
   (a) $h(z) = \frac{z+i}{z-i}$
   (b) $h(z) = \frac{z}{z-1}$
   (c) $h(z) = \frac{z-1}{z}$

2. Rozpatrzmy homografię zadaną wzorem
$$h(z) = \frac{z-i}{iz+2}$$
   (a) znajdź obraz koła $\{z : |z| \leq 2\}$
   (b) znajdź obraz pasa $\{z : \mathrm{re}(z) \in [0,1]\}$

3. Punkt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ jest punktem stałym homografii h jeśli $h(z) = z$. Pokaż, że jeśli homografia h ma dwa punkty stałe $z_1 \neq z_2$, to pewnego $\alpha \neq 0$ i każdego $z \in \mathbb{C}$ spełniona jest tożsamość
$$\frac{h(z)-z_1}{h(z)-z_2} = \alpha \cdot \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

4. Załóżmy, że homografia h jest skończonego rzędu czyli $h^r = id$ dla pewnego $r \geq 1$. Pokaż, że h jest identycznością lub ma dokładnie dwa punkty stałe.

5. Połóżmy $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Dla następujących funkcji postaci
$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$
   policz pochodne cząstkowe jako funkcji $\mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ (gdzie U jest dziedziną f) i zbadaj ich zależność:
   (a) $f(z) = z^{-1}$
   (b) $f(z) = \overline{z}$
   (c) $f(z) = \exp(z)$
   (d) $f(z) = \mathrm{re}(z)$