Funkcje analityczne, seria 15 Jesień 2017

Przed egzaminem zachęcam do powtórzenia typowych zadań ze zbioru Krzyża. W zadaniach z tej serii będziemy korzystać z tw. Hurwitza i Montela; proszę się z nimi zapoznać.
Jak zwykle proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Pokaż zbieżność i wyznacz sumę następujących szeregów:

   (a)
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2i}$$

   (b)
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 4}$$

2. Niech f będzie funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$ taką, że $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Załóżmy ponadto, że f ma skończoną liczbę biegunów $a_1, \ldots, a_m$ i żaden z nich nie jest liczbą całkowitą. Pokaż, że granica po lewej stronie istnieje i zachodzi równość:

   $$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{i=1}^{m} \operatorname{res}_{a_i} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}$$

   Wskazówka: robimy tak jak w podobnym zadaniu z poprzedniej serii.

3. Wykorzystaj poprzednie zadanie do wykazania zbieżności i policzenia następujących szeregów dla $a, b \notin \mathbb{Z},\ a \neq b$:

   (a)
   $$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-a)^2}$$

   (b)
   $$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-a)(n-b)}$$

4. Czy istnieje funkcja analityczna przeprowadzajaca dysk jednostkowy w siebie, taka że $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ oraz $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$? Wskazówka: wykorzystaj szacowanie z lematu Schwarza.

5. Rozpatrzmy otwarty i spójny podzbiór $U \subseteq \mathbb{C}$. Niech $f_n \to f$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych zbieżnym niemal jednostajnie. Pokaż następujące wnioski z twierdzenia Hurwitza:

   (a) Jeśli żadna z funkcji f_n nie przyjmuje wartości zerowych na U, to albo f ma taką sama własność, albo $f \equiv 0$.

   (b) Jeśli każda z funkcji f_n jest różnowartościowa, to albo f ma taką sama własność, albo f jest funkcją stałą.

6. Niech f będzie funkcją holomorficzną na pewnym otoczeniu 0 i taką, że $f(0) = 0$ oraz $|f'(0)| < 1$. Definiujemy indukcyjnie ciąg funkcji: $f_1 = f$ oraz $f_{n+1} = f \circ f_n$. Pokaż, że istnieje $r > 0$ takie, że rodzina funkcji $\{f_n\}$ jest normalna na dysku $D(0, r)$ o środku w 0 i promieniu r.

7. Niech $f : D(0, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną określona na przekłutym dysku jednostkowym. Załóżmy, że f jest różnowartościowa. Pokaż, że albo f ma w 0 osobliwość usuwalną, albo biegun jednokrotny.

8. Korzystając z zasady symetrii Schwarza dowiedź co następuje:

   (a) Jeśli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną taką, że $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ i $f(i \cdot \mathbb{R}) \subseteq i \cdot \mathbb{R}$, to

   $$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = -f(-z) = \overline{f(\overline{x})}$$

   (b) Jeśli f jest funkcją meromorficzną określoną na dysku o promieniu $1 + \epsilon$, gdzie $\epsilon > 0$, taką że $|z| = 1 \Longrightarrow |f(z)| = 1$, to f jest funkcją wymierną.