Funkcje analityczne, seria 14 Jesień 2017

Przed egzaminem zachęcam do powtórzenia typowych zadań ze zbioru Krzyża, rozdz. 3.5–3.7 (liczenie całek) i rozdz. 3.9 (zasada argumentu i tw. Rouché). Jak zwykle proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Załóżmy, że zespolone $a \neq 0$ spełnie warunek $|a| < 1$. Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n równanie $e^z(z-1)^n = a$ ma dokładnie n rozwiązań w kole o promieniu 1 i środku w 1.

2. Niech f będzie funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$ taką, że $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Załóżmy ponadto, że f ma skończoną liczbę biegunów $a_1, \ldots, a_m$ i żaden z nich nie jest liczbą całkowitą. Pokaż, że granica po lewej stronie istnieje i zachodzi równość:

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\pi \sum_{i=1}^{m} \operatorname{res}_{a_i} \frac{f(z)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

   (a) Niech Δ_N oznacza kwadrat o wierzchołkach w $\pm 1 \pm i$ pomnożony przez $N + \frac{1}{2}$. Przez γ_N oznaczmy brzeg Δ_N zorientowany standardowo. Pokaż, że moduł funkcji $\operatorname{ctg}(\pi z) = \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$ jest ograniczony na γ_N przez pewną stałą M niezależną od N.

   (b) Wykorzystaj powyższą obserwację, żeby stwierdzić

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_N} f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 0$$

   (c) Wywnioskuj z tego następującą równość i dowiedź tezę zadania:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{res}_n(f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z)) = -\sum_{i=1}^{m} \operatorname{res}_{a_i}(f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z))$$

3. Wykorzystaj poprzednie zadanie do wykazania zbieżności i policzenia następujących szeregów dla $a, b \notin \mathbb{Z},\ a \neq b$:

   (a)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)^2}$$

(b)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)(n-b)}$$

4. Niech D oznacza dysk jednostkowy $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Wykorzystaj lemat Schwarza, żeby pokazać, że funkcja holomorficzna $f : D \to D$, która nie jest identycznością, ma co najwyżej jeden punkt stały (czyli takie $z \in D$, dla którego $f(z) = z$). Pokaż funkcję f, jak wyżej, która nie ma punktu stałego.

5. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania załóżmy, że $f : D \to D$ nie jest funkcją stałą i zdefiniujmy funkcję $g : D \to \mathbb{C}$ wzorem

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)} f(z)}$$

Pokaż, że dla $z \in D$ mamy $|g(z)| < 1$ oraz $g(0) = 0$, następnie zastosuj lemat Schwarza by pokazać:

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)z|}$$