Funkcje analityczne, seria 13 Jesień 2017

Na początek zrobimy ostatnie zadanie z poprzedniej serii, do którego dodałem wskazówki. Zadania są typowe, część z nich podobna do tych ze zbioru Krzyża, rozdz. 3.5–3.7 (liczenie całek) i rozdz. 3.9 (zasada argumentu i tw. Rouché). Jak zwykle proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Policz następujące całki; pokaż, że są równe tyle ile napisano:

   (a) dla $a \in (0,1)$:
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}dt}{1+e^t} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$
   Wskazówka: policz całkę $f(z) = e^{az}/(1+e^z)$ po brzegu prostokąta o wierzchołkach $\pm R, \pm R + 2\pi i$ i przejdź do granicy $R \to \infty$.

   (b) dla $a > 1$:
   $$\int_0^{\infty} \frac{\cos at}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{4}\pi(a+1)e^{-a}$$
   Wskazówka: policz całkę funkcji zespolonej $f(z) = e^{iaz}/(1+z^2)^2$ po brzegu obszaru $\{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0, |z| \leq R\}$, przejdź do granicy $R \to \infty$.

2. Załóżmy, że funkcja f jest analityczna na otoczeniu otwartym dysku D poza skończona liczbą liczbą punktów $a_1, \ldots, a_r$ gdzie f ma bieguny krotności 1. Załóżmy ponadto, że g jest analityczna na otoczeniu otwartym D. Pokaż, że
   $$\int_\gamma f(z)g(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{r} g(a_i)\mathrm{res}_{a_i} f$$
   gdzie γ jest brzegiem dysku D z dodatnią orientacją. Jak zmieni się ta formuła jeśli bieguny f są wyższej krotności ale g nie ma zer w punktach a_i?

3. Niech $f \in \mathbb{C}[x]$ będzie wielomianem zespolonym stopnia d. Pokaż, że dla każdego $a \in \mathbb{C}$ istnieje $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ takie, że dla każdego $R > R_0$ krzywa $t \to f(Re^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, ma indeks d względem a.

4. Niech f będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu dysku D jednostkowego oraz $|f(z)| < 1$ na brzegu D. Pokaż, że równanie $f(z) = z$ ma dokładnie jedno rozwiązanie we wnętrzu D. Czy wystarczy założyć $|f(z)| \leq 1$ na brzegu D i zachować tezę?

5. Znajdź liczbę zer następujących wielomianów wewnątrz jednostkowego dysku; wskazówka: tw. Rouché.

   (a) $f(z) = z^4 - 9z + 2$

   (b) $f(z) = z^5 + 4z^2 + 1$

6. Znajdź liczbę pierwiastków następujących wielomianów w każdej ćwiartce płaszczyzny zespolonej; wskazówka: policz indeks względem zera krzywej będącej brzegiem obszaru $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0, |z| < R\}$ dla $R \gg 0$, skorzystaj z faktu, że wielomian jest rzeczywisty więc pierwiastki są sprzężone.

   (a) $f(z) = z^8 + z^3 + z + 7$

   (b) $f(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 4z + 3$