Funkcje analityczne, seria 12 Jesień 2017

Zadania są typowe. Większość z nich można znaleźć w zbiorze Krzyża, rozdz. 3.5–3.7. Jak zwykle proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Sformułuj i dowiedź regułę de l'Hospitala dla ilorazów funkcji analitycznych, które mają osobliwość (lub zero) w ustalonym punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$; wykorzystaj rozwinięcie w szereg Laurenta.

2. Załóżmy, że funkcja f ma biegun rzędu r w punkcie $a \in \mathbb{C}$. Pokaż, że

$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{(m-1)!} \cdot g^{(m-1)}(a)$$

   gdzie $g(z) = (z-a)^m f(z)$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu a.

3. Weźmy rzeczywiste $a > 1$. Policz residua funkcji $f(z) = (z^2+2az+1)^{-1}$. Następnie zastosuj podstawienie $z = e^{i\theta}$ i twierdzenie o residuach by dowieść

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

4. Niech $h(x_1, x_2)$ bedzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Pokaż, że podstawienie $z = e^{i\theta}$ pozwala zastąpić liczenie całki $\int_0^{2\pi} h(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ liczeniem całki $\int_\gamma f(z)dz$, gdzie f jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej a γ jest brzegiem koła jednostkowego.

5. Wykorzystaj metodę z poprzedniego zadania by dowieść dla zespolonego a, $|a| < 1$ mamy równość:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \pi \cdot \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

6. Policz residua funkcji $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ i wykorzystaj twierdzenie o residuach by dowieść

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

7. Metodami z poprzedniego zadania policz następujące całki:

(a)

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

(b)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$$

Wskazówki: (a) policz całkę tej funkcji wymiernej po brzegu półkola o promieniu $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq 0, |z| \leq R\}$ przejdź do granicy $R \to \infty$; (b) weź funkcję $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z^2}$ i policz całkę po brzegu półpierścienia $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq 0, r \leq |z| \leq R\}$ i przejdź do granicy $R \to \infty,\ r \to 0$.