Funkcje analityczne, seria 11 Jesień 2017

Na początek zrobimy niezrobione zadania z poprzedniej serii. Dla przypomnienia umieszczam je i w tej serii.
Jak zwykle proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Niech $f : \Omega \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną zdefiniowana na obszarze Ω. Załóżmy, że f nie jest funkcją stałą, natomiast jej moduł $|f(Z)|$ jest stały na brzegu Ω. Pokaż, że f przyjmuje wartości zerowe wewnątrz Ω.

2. Policz maksimum funkcji $|z^2 - z + 1|$ na dysku jednostkowym $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

3. Załóżmy, że funkcje f i g są holomorficzne na obszarze Ω. Pokaż, że jeśli funkcja $|f| + |g|$ przyjmuje maksimum lokalne w pewnym punkcie wewnątrz Ω to obie funkcje są stałe.

4. Pokaż, że każda funkcja holomorficzna na płaszczyźnie domkniętej $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ z wyjątkiem skończonej liczby biegunów jest wymierna, czyli jest postaci g_1/g_2, gdzie $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[z]$. Pokaż, że liczba biegunów takiej funkcji, liczonych z krotnościami, jest równa liczbie zer liczonych z krotnościami (zera i bieguny liczymy też w ∞).

5. Załóżmy, że f jest wielomianem zespolonym stopnia n i $|f(z)| \leq M$ dla wszystkich $|z| \leq 1$ i pewnego $M \in \mathbb{R}_{>0}$. Pokaż, że dla $|z| \geq 1$ zachodzi $|f(z)| \leq M|z|^n$.

6. Ustalmy $w \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\ w > 0$. Całkując funkcję $f(z) = \frac{e^{-z}}{z}$ po brzegu czworokąta (lub wycinka pierścienia) o wierzchołkach r, R, rw, Rw, gdzie $0 < r < R$ są rzeczywiste, i przechodząc do granicy $r \to 0$, $R \to \infty$ policz całkę
$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tw}}{t} dt$$

7. Załóżmy, ze funkcja holomorficzna $f : D(0, r) \to \mathbb{C}$ przekształca bijektywnie pewne otoczenie 0 w otoczenie 0. Pokaż, że pochodna f w zerze jest niezerowa. Wywnioskuj z tego, że bijektywna funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \supseteq U \to U' \subseteq \mathbb{C}$ wyznacza biholomorfizm zbiorów otwartych U i U'.

8. Policz rezidua następujących funkcji meromorficznych w ich punktach osobliwych:
   (a) $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2(z^2-1)}$
   (b) $f(z) = \frac{1}{z^4-a^4}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$
   (c) $f(z) = \frac{z^{n-1}}{z^n-a^n}$ dla $n \geq 1$ i $a \in \mathbb{C}$
9. Sformułuj i dowiedź regułę de l'Hospitala dla ilorazów funkcji analitycznych, które mają osobliwość (lub zero) w utalonym punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$.