**Funkcje analityczne, seria 10** Jesień 2017

Jak zwykle proszę zgłaszać e-mailem ewentualne błędy, literówki czy ogólne wątpliwości.

1. Zbadaj typ osobliwości podanej funkcji $f$ w $z = 0$; jeśli osobliwość jest usuwalna to znajdź pierwsze trzy współczynniki rozwinięcia $f$ wokół 0.

   (a) $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2}$, (c) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, (e) $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$

   (b) $f(z) = \frac{\cos 2z - \cos z}{z}$ (d) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$,

2. Załóżmy, że funkcja $f$ jest holomorficzna na pewnym otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ poza $z_0$. Niech $g$ bedzie wielomianem zespolonym stopnia $> 0$. Zbadaj osobliwość funkcji $g \circ f$ w punkcie $z_0$ w zależności od osobliwości $f$ w tym punkcie.

3. Załóżmy, że $f$ jest funkcją na dysku (kole) taką, że $f^2$ i $f^3$ są holomorficzne. Pokaż, że $f$ też jest funkcją holomorficzną.

4. Niech $f : \Omega \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną zdefiniowana na obszarze $\Omega$. Załóżmy, że $f$ nie jest funkcją stałą, natomiast jej moduł $|f(Z)|$ jest stały na brzegu $\Omega$. Pokaż, że $f$ przyjmuje wartości zerowe wewnątrz $\Omega$.

5. Policz maksimum funkcji $|z^2 - z + 1|$ na dysku jednostkowym $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

6. Załóżmy, że funkcje $f$ i $g$ są holomorficzne na obszarze $\Omega$. Pokaż, że jeśli funkcja $|f| + |g|$ przyjmuje maksimum lokalne w pewnym punkcie wewnątrz $\Omega$ to obie funkcje są stałe.

7. Pokaż, że każda funkcja holomorficzna na płaszczyźnie domkniętej $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ z wyjątkiem skończonej liczby biegunów jest wymierna, czyli jest postaci $g_1/g_2$, gdzie $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[z]$. Pokaż, że liczba biegunów takiej funkcji, liczonych z krotnościami, jest równa liczbie zer liczonych z krotnościami (zera i bieguny liczymy też w $\infty$).

8. Załóżmy, że $f$ jest wielomianem zespolonym stopnia $n$ i $|f(z)| \leq M$ dla wszystkich $|z| \leq 1$ i pewnego $M \in \mathbb{R}_{>0}$. Pokaż, że dla $|z| \geq 1$ zachodzi $|f(z)| \leq M|z|^n$.

9. Ustalmy $w \in \mathbb{C}$, Im $w > 0$. Całkując funkcję $f(z) = \frac{e^{-z}}{z}$ po brzegu czworokąta (lub wycinka pierścienia) o wierzchołkach $r, R, rw, Rw$, gdzie $0 < r < R$ są rzeczywiste, i przechodząc do granicy $r \to 0$, $R \to \infty$ policz całkę

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tw}}{t} dt$$