Funkcje analityczne, seria 1 Jesień 2017

Rzut sterograficzny i homografie; więcej zadań (ze wskazówkami, również do tych z tej kartki!) można znaleźć w zbiorze Jana Krzyża, rozdz. 1.2, 1.4.

1. Pokaż następujące własności rzutu stereograficznego sfery jednostkowej; p_N rzut z bieguna północnego $N = (0, 0, 1)$ i p_S z bieguna południowego $S = (0, 0, -1)$:

$$S^2 \setminus \{N\} \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto z \in \mathbb{C}$$

   (a) Odwzorowanie odwrotne do rzutu p_N jest zadane wzorem

$$z \mapsto \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \frac{i(\overline{z} - z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right)$$

   (b) Dla $x \neq N, S$ zachodzi $p_N(x) \cdot \overline{p_S(x)} = 1$.

   (c) Rzut stereograficzny pozwala utożsamić sferę S^2 z jednopunktowym uzwarceniem płaszczyzny zespolonej

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

   (d) Obraz okręgu O na sferze S^2 przy odwzorowaniu p_N jest okręgiem lub prostą w zależności od tego czy $N \in O$.

2. Pokaż następujące własności homografii czyli przekształceń $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ typu

$$\widehat{\mathbb{C}} \ni z \mapsto h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \widehat{\mathbb{C}}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ są takie że $ad - bc \neq 0$:

   (a) Każda homografia jest złożeniem przekształceń afinicznych typu $z \mapsto az + b$ oraz inwersji $z \mapsto z^{-1}$.

   (b) Homografia zachowuje dwustosunek

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

   (c) Jedyną homografią h taką, że $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ i $h(\infty) = \infty$ jest identyczność.

   (d) Dla dowolnej trójki punktów w $\widehat{\mathbb{C}}$, $z_0 \neq z_1 \neq z_\infty \neq z_0$, istnieje dokładnie jedna homografia taka, że

$$h(0) = z_0,\ h(1) = z_1,\ h(z_\infty) = \infty$$

(e) Homografie stanowią grupę ze względu na składanie.

(f) Przekształcenie

$$SL(2,\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

jest homomorfizmem grupy macierzy o wyznaczniku 1 w grupę przekształceń przestrzeni $\widehat{\mathbb{C}}$.

i. Obrazem tego przekształcenia jest grupa homografii.

ii. Jądrem tego przekształcenia jest grupa dwuelementowa.

3. Pokaż, że przekształcenie $z \mapsto z^{-1}$ przekształca okrąg o środku w $a \in \mathbb{C}$ i promieniu $r \neq |a|$ na okrąg o środku w $\overline{a}/(|a|^2 - r^2)$ i promieniu $r/||a|^2 - r^2|$. Wywnioskuj z tego, że obrazy okręgów przy homografiach to okręgi lub proste.

4. Symetria (inwersja) względem okręgu. Punkt $\iota(z)$ jest symetryczny do z względem okręgu o środku w $a \in \mathbb{C}$ i promieniu r jeśli $\iota(z)$ leży na półprostej z a w kierunku z oraz $|z-a||\iota(z)-a| = r^2$. Pokaż, że

$$\iota(z) = \frac{a\overline{z} + (r^2 - |a|^2)}{\overline{z} - \overline{a}}$$