Tw. Banacha-Alaoglu

W przestrzeni X^* kula $B_{X^*} = \{x^* : \|x^*\| \leq 1\}$ jest słabo* zwarta.

Wniosek. Jeśli X^* jest ośrodkowa, to B_{X^*} jest metryzowalna (wtedy X^* ośr.).

Def. $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u, Du)\, dx$

Będziemy mówić, że $\mathcal{F}$ jest koercytywny, jeśli
$$\lim_{\|u\|_{1,p} \to \infty} \mathcal{F}(u) = +\infty$$

Prostym warunkiem wystarczającym jest $F(x,u,z) \geq \nu(|u|^p + |z|^p)$ dla pewnych $\nu > 0$ i $p > 1$.

Tw. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ domknięty,
$\mathcal{F}$ będzie WLSC w $W^{loc}_{1,p}(\Omega, M)$, $p > 1$.
$V \subseteq W_{1,p}(\Omega, M)$ słabo domknięty
$\mathcal{F}$ koercytywny w V, tzn. $\lim_{\substack{\|u\|_{1,p} \to \infty \\ u \in V}} \mathcal{F}(u) = +\infty$.

Wtedy $\mathcal{F}$ przyjmuje minimum w V.

Dowód. Wystarczy szukać minimum w pewnej kuli w $W_{1,p}(\Omega, M)$ (z koercytywności).
Z tw. Banacha-Alaoglu, ośrodkowości i refleksywności kula jest słabo ciągowo zwarta, czyli można z ciągu minimalizującego wybrać podciąg słabo zbieżny w $W_{1,p}$. W granicy $\mathcal{F}$ przyjmuje minimum z dolnej półciągłości.

Załóżmy, że mamy daną funkcję $U \in W_{1,p}(\Omega)$ i stawiamy warunek $u - U \in \mathring{W}_{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W_{1,p}}$

Załóżmy dodatkowo, że Ω jest ograniczony.

Wystarczające będzie nierówność $F(x,u,z) \geq |z|^p + b(x)|u|^\delta - a(x)$ dla $1 \leq \delta < p$, $a \in L_1(\Omega)$, $b \in L_{\frac{p}{p-\delta}}(\Omega)$.

Dowód. Mamy nierówność $|u|^\delta \leq c(|U|^\delta + |u-U|^\delta)$ dla pewnej stałej c.
i z nierówności Younga mamy $b|u|^\delta \leq cb|U|^\delta + \varepsilon|u-U|^p + c(\varepsilon)\, b^{\frac{p}{p-\delta}}$.
$b|u-U|^\delta$ → stosujemy n. $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_\Omega |u-U|^p\,dx \le c(\Omega)\int_\Omega |D(u-U)|^p\,dx$$

na $x = b \cdot c_1$, $y = |u-U|^r \cdot \frac{1}{c_1}$, $\hat{p} = \frac{p}{r}$, $\hat{q} = \frac{p-r}{p}$

Korzystając z tego, otrzymujemy

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx \ge \int_\Omega |\nabla u|^p - b|u|^r - a \ge$$

$$\ge \int_\Omega |\nabla u|^p - \varepsilon\, c(\Omega)\int_\Omega |\nabla(u-U)|^p - c(a,U,\varepsilon,\Omega)$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^p - c(a,U,\varepsilon,\Omega) \quad \text{dla odpowiednio małego } \varepsilon.$$

Stąd $\|u\|_{1,p}^p = \int_\Omega (|u|^p + |\nabla u|^p) \le C\cdot(\mathcal{F}(u)+1)$, czyli $\mathcal{F}$ jest koercywna.

V Uwagi

$\mathcal{F}: V \to \mathbb{R}$

Niech $\mathcal{F}$ nie jest l.s.c lub V nie jest zupełna.

$\overline{\mathcal{F}}: \overline{V} \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{F}}(u) := \inf\left\{\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) : u_k \to u\right\}$

- $\mathcal{F}(u) \ge \overline{\mathcal{F}}(u)$
- $\mathcal{F}(u) = \overline{\mathcal{F}}(u) \iff \mathcal{F}$ l.s.c. Wtedy też $\inf \mathcal{F} = \min \overline{\mathcal{F}}$
- $\overline{\mathcal{F}}$ jest największym dolnie-półciągłym funkcjonałem mniejszym lub równym $\mathcal{F}$.

$A: L^1 \to \overline{\mathbb{R}}$,
$$A(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|\,dx & \text{dla } u \in W_g^{1,1} \\ +\infty & \text{wpp.} \end{cases}$$

$u_n \xrightarrow{L^1} u \in L^1$, $u_n \in W_g^{1,1}$

$$\overline{A}(u) = \inf\left\{\liminf_{k\to\infty} A(u_k) : u_k \xrightarrow{L^1} u\right\}$$

$$\bar{A} : BV_g \to \mathbb{R}$$

$$\bar{A}(u) = \int_\Omega |Du|\, dx + \int_{\partial\Omega} |\gamma u - g|\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

■

Quasi-wypukłość

Tw. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otw., $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ Carat., $F(\cdot, u, z) \in L^1_{loc}$

Niech $\forall u \in \mathbb{R}^N$ $\mathcal{F}_u(z) = \int_\Omega F(x,u,z)\,dx$ l.s-c w *-słab. top. w L^∞_{loc} w z.

Wtedy dla p.w. $x \in \Omega$ i $\forall u \in \mathbb{R}^N$ $F(x,u,\cdot)$ - wypukła.

D. $u \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $Q \subset \Omega$ - kostka o śr. w x_0

$\forall \lambda \in [0,1]$ $\exists$ ciąg χ_n - f. char. zb. $E_n \subset Q$

t. że $\boxed{\chi_n \xrightarrow{*} \lambda \chi_Q}$. Niech $a, b \in \mathbb{R}^\nu$, $u \in \mathbb{R}^N$ ustalony

$z_n = a\chi_n + b(1-\chi_n)$ i $z = a\lambda + b(1-\lambda)$ w Q i $z_n = z = 0$ w $\Omega \setminus Q$.

Mamy

$$F_u(z_n) - F_u(z) = \int_Q F(x, u, a\chi_n + b(1-\chi_n)) - F(x,u,z)\, dx$$

$$\int_Q F(x,u,a\chi_n + b(1-\chi_n))\,dx = \underbrace{\int_Q \chi_n F(x,u,a)\,dx + \int_Q (1-\chi_n) F(x,u,b)\,dx}$$

$$0 \le \liminf_{n\to\infty} F_u(z_n) - F_u(z) = \lambda \int_Q F(x,u,a)\,dx + (1-\lambda)\int_Q F(x,u,b)\,dx - \int_Q F(x,u,z)\,dx$$

$$\frac{1}{|Q|}$$

■

Def. $u_n \in Lip$ jest L-zbieżny do u jeśli $u_n \rightrightarrows u$ w Ω oraz

$\exists M > 0 \ \forall n \ \sup |\nabla u_n| \leq M$

Uw. L-zbieżność jest równ. słabej * zbieżności w $W^{1,\infty} = Lip$.

Tw. Jeśli $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(\nabla u)\,dx$ jest l.s.c. w L-zbieżności

to $\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$ $\forall z_0 \in \mathbb{R}^{nN}$ mamy $F(z_0)|\Omega| \leq \int_\Omega F(z_0 + \nabla\varphi)\,dx$.

Tw. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otw., ogr., F ciągła

$\mathcal{F}(u,\Omega) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\,dx$ l.s.c w L-zb. Wtedy

$\forall \varphi \in C_0^1$ $\forall x_0 \in \Omega$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$, $z_0 \in \mathbb{R}^{nN}$ mamy

$$F(x_0, u_0, z_0)|\Omega| \leq \int_\Omega F(x_0, u_0, z_0 + \nabla\varphi)\,dx$$

Quasi-wypukłość

Tw. F jest quasi-wyp., $0 \leq F(z) \leq c(1 + |z|^p)$, $p \geq 1$

wtedy $\mathcal{F}(u,\Omega) = \int_\Omega F(\nabla u)\,dx$ jest l.s.c w sł. top. w $W^{1,p}_{loc}$.

Dzięki za uwagę!