Metody bezpośrednie

I funkcjonały półciągłe

X – przestrzeń topologiczna $\quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$F : X \to \overline{\mathbb{R}}$

$\sum(F) = \{(x,t) \in X \times \overline{\mathbb{R}} ;\ t \geq F(x)\}$ nadwykres

Następujące warunki są równoważne:

1) dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $F_t = \{x : F(x) > t\}$ jest otwarty
2) —— || —— $\quad G_t = \{x : F(x) \leq t\}$ jest domknięty
3) $\sum(F)$ jest domknięty

Wtedy będziemy mówić, że F jest półciągły z dołu (LSC).

Def. Funkcjonał F jest ciągowo półciągły z dołu (SLSC) jeżeli dla każdego ciągu $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ takiego, że $v_k \to v \in X$ mamy $F(v) \leq \liminf F(v_k)$

Lemat.

1) F jest LSC $\to$ F jest SLSC
2) jeżeli X spełnia I AP i F jest SLSC, to F jest LSC.

Dowód.

(1) Niech $v_k \to v$ i $u = \liminf_k F(v_k)$.
Rozważmy zbiór $G_{u+\varepsilon}$ $\to$ istnieje ciąg $(k_1, k_2, \ldots)$ taki, że $v_{k_i} \in G_{u+\varepsilon}$ dla każdego i.
Skoro $v_{k_i} \to v$ i $G_{u+\varepsilon}$ jest domknięty, to też $v \in G_{u+\varepsilon}$.
Z dowolności ε mamy $F(v) \leq u$.

(2) Rozważmy G_t i $v \in \operatorname{cl} G_t$. Skoro X spełnia I AP, to istnieje ciąg $v_k \to v$ taki, że $\forall k\ v_k \in G_t$.
Stąd $F(v) \leq \liminf F(v_k) \leq t$, czyli też $v \in G_t$.

Lemacik. $(f^\alpha)_{\alpha \in I}$ – rodzina funkcji LSC (SLSC).
Wtedy $f(x) = \sup_\alpha f^\alpha(x)$ również jest LSC (SLSC).

Dowodzik. (1) $F_t = \bigcup_\alpha F_t^\alpha$ $\to$ otwarte

$F_t^\alpha = \{x : f^\alpha(x) > t\}$
$F_t = \{x : f(x) > t\}$

(2) $x_k \to x$
$f(x) = \sup_\alpha f^\alpha(x) \leq \sup_\alpha \liminf_k f^\alpha(x_k) \leq$
$\leq \liminf_k \sup_\alpha f^\alpha(x_k) = \liminf_k f(x_k)$.

$$\sup_\alpha \liminf_k f^\alpha(x_k) \le t \iff \forall \alpha \ \liminf_k f^\alpha(x_k) \le t$$

Ale $\liminf_k f^\alpha(x_k) \le \liminf_k \sup_\alpha f^\alpha(x_k)$

II Funkcjonały wypukłe.

$F : \Omega \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$

Lemat. Niech F - Carathéodory'ego, $y : \Omega \to \mathbb{R}^s$ mierzalne.
Wtedy $g(x) = F(x, y(x))$ również jest mierzalne.

Dowód. Ćwiczenie dla studentów.

Tw. F - Carathéodory'ego, nieujemna $y_k \to y$ w $L_1(\Omega)$.

$$\int_\Omega F(x, y(x))\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega F(x, y_k(x))\,dx$$

$k \leftarrow$ przejście do podciągu

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(x, y_k(x))\,dx$$

Ponownie przechodząc do podciągu możemy zapewnić, że $y_k \to y$ p.w. Stąd też $F(x, y_k(x)) \to F(x, y(x))$ p.w.

Teza wynika z lematu Fatou.

Fakt. X - przestrzeń lin. top. lokalnie wypukła
$C \subseteq X$ zbiór wypukły
Wtedy C jest domknięty $\iff$ C jest słabo domknięty

X^* - przestrzeń funkcjonałów liniowych ciągłych

T_ω - najsłabsza topologia na X taka, że wszystkie funkcjonały z X^* nadal są ciągłe.

$x_k \rightharpoonup x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varphi \in X^*$ mamy $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$.

Np. $L_p(\Omega)$, z normą $\|f\| = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ $1 \le p < \infty$

$L_p(\Omega)^* \cong L_q(\Omega)$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$f_n \rightharpoonup f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall g \in L_q(\Omega) \ \int_\Omega f_n g \to \int_\Omega f g$$

Tw. F - Carathéodory'ego, nieujemna.
Dla p.w. $x \in \Omega$ $y \mapsto F(x, y)$ jest wypukła.

Wtedy $\mathcal{F}(y) = \int_\Omega F(x, y(x))\,dx$ jest LSC na $(L_1(\Omega), \omega)$. WLSC

Dowód. $\mathcal{F}$ jest LSC w topologii normowej na L_1

$\Downarrow$

$\Sigma(\mathcal{F})$ domknięty

$\Downarrow$

$\Sigma(\mathcal{F})$ jest słabo domkn. $\Leftarrow$

$\Downarrow$

$\mathcal{F}$ jest WLSC

F jest wypukła dla p.w. $x \in \Omega$

$\Downarrow$

$\mathcal{F}$ jest wypukły

$\Downarrow$

$\Sigma(\mathcal{F})$ jest wypukły

III Półciągłość $F : \overset{x}{\bar{\Omega}} \times \overset{u}{\bar{M}} \times \overset{z}{\bar{\mathbb{R}}^D} \to \mathbb{R}$, M - domknięty, $\mathcal{F}(u,z) = \int_\Omega F(x, u(x), z(x))\,dx$

Tw. $F \geq 0$, $\underbrace{F, F_2 - \text{ciągłe}}$, F - wypukła w z.

Niech $u_k, u \in L(\Omega; M)$, $z_k, z \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^D)$, $u_k \xrightarrow{L^1_{loc}} u$, $z_k \xrightarrow{L^1_{loc}} z$. Wtedy $\mathcal{F}(u,z) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k, z_k)$. $\leftarrow$

D. Niech Ω - ogr., $D \subset\subset \Omega$

Jegorow + Łuzin $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \subset D$ zwarty : $|D \setminus K| < \varepsilon$ oraz

i) $u_k \rightrightarrows u$ w K

ii) $u, z \in C(K)$

iii) $\int_K F(x,u,z)\,dx \geq \int_D F(x,u,z)\,dx - \varepsilon$.

Mamy

$$\int_K F(x,u_k,z_k)\,dx = \int_K F(x,u_k,z) + F(x,u_k,z_k) - F(x,u_k,z)\,dx \geq$$

$$\geq \int_K F(x,u_k,z)\,dx + \int_K \langle F_2(x,u_k,z), z_k - z\rangle\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_K F(x,u_k,z)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_K \langle F_2(x,u,z), z_k - z\rangle\,dx}_{II} + \underbrace{\int_K \langle F_2(x,u_k,z) - F_2(x,u,z), z_k - z\rangle\,dx}_{III}$$

- $I \to \int_K F(x,u,z)\,dx$
- $II \to 0$
- $III \leq \|z_k - z\|_{L^1} \sup_{x\in K} |F_2(x,u_k(x),z(x)) - F_2(x,u(x),z(x))| \longrightarrow 0$

Stąd $\liminf\limits_{k\to\infty} \int\limits_K F(x,u_k,z_k)\,dx \geq \int\limits_K F(x,u,z)\,dx \geq \int\limits_D F(x,u,z)\,dx - \varepsilon$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega F(x,u_k,z_k)\,dx \geq \int_D F(x,u,z)\,dx$$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega F(x,u_k,z_k)\,dx \geq \int_\Omega F(x,u,z)\,dx$$

; Ω – ograniczone.

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega F(x,u_k,z_k)\,dx \geq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\cap B_N} F(x,u_k,z_k)\,dx \geq \int_{\Omega\cap B_N} F(x,u,z)\,dx$$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega F(x,u_k,z_k)\,dx \geq \int_\Omega F(x,u,z)\,dx.$$

■

<u>Lem.</u> $E \subset \mathbb{R}^n$ – otw., $|E| < +\infty$, $z_k \xrightarrow{L^p(E)} z$, $p \geq 1$. Dla $L>0$ określmy

$$z^L = \begin{cases} z, & |z| \leq L \\ 0, & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Wtedy $\forall L \in \mathbb{Z}$ $\exists z_{k_s}$ i $V_L \in L^2(E)$:

$z^L_{k_s} \xrightarrow[s\to\infty]{L^2(E)} V_L$. Ponadto, jeśli $L \to \infty$, to $V_L \xrightarrow[L\to\infty]{L^1} z$.

□

<u>Lem.</u> $K \subset \mathbb{R}^n$ – zwarty, $F \geq 0$ w $K \times M \times \mathbb{R}^\nu$ ciągła, z – wypukła.
Niech $u_k \rightrightarrows u$, $z_k \xrightarrow{L^p(K)} z$, $p \geq 1$. Wtedy

$$\int_K F(x,u,z)\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_K F(x,u_k,z_k)\,dx.$$

D. $R \geq \sup\limits_k \|u_k\|_{L^\infty}$, $M_R = M \cap \overline{B}_R$, $T = \sup\limits_{K\times M_R} F(x,u,0)$, $\Lambda = \sup\limits_k \|z_k\|_{L^p}$

$K_{k,L} = \{x \in K : |z_k(x)| > L\}$, mamy $|K_{k,L}| \leq \left(\frac{\Lambda}{L}\right)^p$.

$$|K_{k,L}| \leq \int |z_k(x)|^p\,dx \,\frac{1}{L^p}$$

$$\int_K F(x,u,z)\,dx \leq \liminf_{l\to\infty} \int_K F(x,u,v_l)\,dx \quad ; \quad \Leftarrow$$

$$\int_K F(x,u,v_l)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_K F(x,u,z_n^l)\,dx \quad \leftarrow$$

$$\int_K F(x,u,z_n^l)\,dx = \int_K F(x,u_n,z_n^l) + \int_K F(x,u,z_n^l) - F(x,u_n,z_n^l)\,dx \leq$$

$$\leq \overset{\mathrm{I}}{\int_K F(x,u_n,z_n)\,dx} + \overset{\mathrm{II}}{\int_{K_{n,l}} F(x,u_n,0)\,dx} + \overset{\mathrm{III}}{\int_K F(x,u,z_n^l) - F(x,u_n,z_n^l)\,dx}$$

$$\mathrm{III} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\mathrm{II} \leq T\left(\frac{1}{l}\right)^p \quad ;$$

$$\int_K F(x,u,v_l)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_K F(x,u_n,z_n)\,dx + T\left(\frac{1}{l}\right)^p$$

$\blacksquare$