Twierdzenie Arzeli - Ascoliego

Giulio Ascoli (1843-1896)
Cesare Arzelà (1847-1912)

Przypomnienie: $A \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty, ~~zat~~ jeżeli każdy ciąg elementów A, zbieżny w $\mathbb{R}^n$, ma granicę w A.

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, jeżeli z każdego ciągu elementów A możemy wybrać podciąg zbieżny do elementu A.

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Pytanie: Jakie warunki powinna spełniać rodzina $\mathcal{F}$ funkcji ciągłych, by z każdego ciągu elementów $\mathcal{F}$ można było wybrać podciąg jednostajnie zbieżny do elementu $\mathcal{F}$?

(a więc, jeżeli przyjmujemy geometryczne intuicje - - przestrzeń funkcji ciągłych na A ze zbieżnością jednostajną i odległością $d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|$, jakie podzbiory p-ni funkcji ciągłych są zwarte?)

~~Twierdzenie~~

Niech $\mathcal{F} \subset C(A)$ będzie rodziną funkcji ciągłych na A (przez $C(A)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych z A w $\mathbb{R}$).

Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest

- domknięta, jeżeli dla każdego ciągu (f_n) funkcji z $\mathcal{F}$, jeżeli $f_n \rightrightarrows f \in C(A)$, to $f \in \mathcal{F}$.
- wspólnie ograniczona, jeżeli $\exists_{M>0} \forall_{f\in\mathcal{F}} \sup_A |f| < M$
- równociągła (jednakowo ciągła), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{f\in\mathcal{F}} \forall_{x,y\in A} \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Przykłady:

1. Niech $\mathcal{W}$ będzie rodziną wszystkich wielomianów na $A=[0,1]$.

czy $\mathcal{W}$ jest domknięta? nie – istnieje (tw. Weierstrassa) ciąg funkcji z $\mathcal{W}$ jednost. zbieżny np. do $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, a ta funkcja nie jest wielomianem (bo np. ma nieskończenie wiele miejsc zerowych w $[0,1]$).

czy $\mathcal{W}$ jest wspólnie ograniczona? nie – w $\mathcal{W}$ zawierają się np. wszystkie funkcje stałe na $[0,1]$.

Czy $\mathcal{W}$ jest równociągła? też nie. Ustalmy $\varepsilon>0$, dobierzmy doń $\delta>0$, weźmy $x,y\in[0,1]$ tż. $|x-y|<\delta$ i $f\in\mathcal{W}$ tż. $f(t)=at$ dla $a>\frac{\varepsilon}{|x-y|}$

Oczywiście $f\in\mathcal{W}$, ale

$$|f(x)-f(y)| = a|x-y| > \frac{\varepsilon}{|x-y|}|x-y| = \varepsilon \quad \lightning.$$

2. Ustalmy $L>0$ i rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{L}_L$ wszystkich funkcji lipszycowskich na $\mathbb{R}$ (lub np. $[0,1]$) o stałej Lipschitza $\leq L$. Wówczas $\mathcal{L}_L$ jest ~~j~~ równociągła (prościutkie ćwiczenie).
Czy $\mathcal{L}_L$ jest domknięta? wspólnie ograniczona?

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zwarty.

Rodzina $\mathcal{F} \subset C(A)$ jest zwarta (tj. z każdego ciągu funkcji z $\mathcal{F}$ można wybrać podciąg jednost. zbieżny do elementu $\mathcal{F}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}$ jest domknięta, wspólnie ograniczona i równociągła.

Def: Podzbiór S zbioru A nazywamy ε-siecią w A, jeżeli $\forall_{x \in A} \exists_{y \in S} |x-y| < \varepsilon$.

Lemat: Jeżeli A jest zwarty, to $\forall_{\varepsilon>0}$ w A istnieje ~~ε-sieć S_ε~~ skończona ε-sieć S_ε.

Dowód: Załóżmy przeciwnie - ~~że~~ istnieje $\varepsilon>0$ takie, że w A nie ma ~~sieci~~ skończonej ε-sieci. Wybierzmy ciąg (x_n) następująco:
x_1 dowolny punkt A;
załóżmy, że wybraliśmy $x_1, x_2, \dots, x_k$ tak, że $\forall_{\substack{i,j \in \{1,\dots,k\} \\ i \neq j}} |x_i - x_j| \geq \varepsilon$.
W A znajdziemy teraz x_{k+1} t.ż. $\forall_{i \in \{1,\dots,k\}} |x_{k+1} - x_i| \geq \varepsilon$, w przeciwnym razie $\{x_1, \dots, x_k\}$ byłoby skończoną ε-siecią w A.
W ten sposób skonstruowaliśmy ciąg (x_n) taki, że dowolne jego 2 elementy są oddalone o co najmniej ε,

Oczywiście z takiego ciągu nie można wybrać podciągu zbieżnego, co jest sprzeczne ze zwartością A.

Dowód tw. Arzeli-Ascoliego

Najpierw wykażemy, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest zwarta, to jest

① domknięta

② wspólnie ograniczona

i ③ ~~jest~~ równociągła.

① domkniętość: weźmy dowolny ciąg $(f_n) \subset \mathcal{F}$ jednostajnie zbieżny do funkcji $f \in C(A)$. Z ciągu (f_n) możemy wybrać podciąg zbieżny do $g \in \mathcal{F}$ (ze zwartości $\mathcal{F}$), ale jeżeli $f_n \rightrightarrows f$, to każdy jego podciąg też zbiega do f, więc $g = f$, skąd $f \in \mathcal{F}$.

② wspólna ograniczoność

Gdyby $\mathcal{F}$ nie była wspólnie ograniczona, to znaleźlibyśmy ciąg (f_n) elementów $\mathcal{F}$ t.ż.

$\sup_A |f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Z takiego ciągu nie można wybrać podciągu ~~zbieżnego~~ jednostajnie zbieżnego; ~~np.~~ Załóżmy bowiem, że $f_{n_k} \rightrightarrows f \in \mathcal{F}$.

Wtedy $\sup_A |f - f_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ale $\sup |f_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$;

~~skąd~~

$$\underset{\downarrow \atop \infty}{\sup |f_{n_k}|} \le \sup_A \left(|f| + |f_{n_k} - f|\right) \le$$

$$\le \sup_A |f| + \sup_A |f_{n_k} - f| \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sup_A |f| \qquad ⚡$$

równociągłość: załóżmy, że $\mathcal{F}$ nie jest równociągła, a więc

$$\sim \left(\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{f\in\mathcal{F}} \forall_{x,y\in A} \; |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \right)$$

cyli

$$\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{f\in\mathcal{F}} \exists_{x,y\in A} \; |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon .$$

Do ε spełniającego powyższy wzór ustalmy $\delta = \frac{1}{n}$. Znajdziemy wówczas $x_n, y_n \in A$ oraz $f_n\in\mathcal{F}$ tż. $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ i $|f_n(x_n)-f_n(y_n)| \geq \varepsilon$.

zbiór A jest zwarty, więc z otrzymanego w ten sposób ciągu (x_n) możemy wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny do $\tilde{x}\in A$. Zauważmy, że (y_{n_k}) też dąży do $\tilde{x}$, bo $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Rodzina $\mathcal{F}$ jest zwarta, więc z ciągu (f_{n_k}) możemy wybrać podciąg $(f_{n_{k_l}})$ jednostajnie zbieżny do $\tilde{f}\in\mathcal{F}$.

Funkcja $\tilde{f}$, jako jednostajna granica ciągu funkcji ciągłych, jest ciągła, ale

$$\left.\begin{aligned} \lim_{l\to\infty} \tilde{f}(x_{n_{k_l}}) &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ \lim_{l\to\infty} \tilde{f}(y_{n_{k_l}}) &= \tilde{f}(\tilde{x}) \end{aligned}\right\} \text{ z ciągłości } \tilde{f}$$

choć $\forall_l \; |\tilde{f}(x_{n_{k_l}}) - \tilde{f}(y_{n_{k_l}})| \geq \varepsilon.$ $\lightning$.

Teraz w drugą stronę: wykażemy, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest domknięta, wspólnie ograniczona i jednakowo ciągła, to z każdego ciągu (f_n) elementów $\mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do funkcji z $\mathcal{F}$.

W zbiorze A, dla każdego $m \in \mathbb{N}$, znajdziemy skończoną ~~$S_{\frac{1}{m}}$~~ $\frac{1}{m}$-sieć S_m. Ustawmy elementy wszystkich tych sieci w ciąg – najpierw elementy 1-sieci S_1, potem $\frac{1}{2}$-sieci S_2 itd; oznaczmy ten ciąg przez (x_n).

Przyjrzyjmy się ciągowi $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Z wspólnej ograniczoności $\mathcal{F}$ wynika, że ciąg ten jest ograniczony, a więc (tw. Bolzano-Weierstrassa) możemy z niego wybrać podciąg ~~(który oznaczmy)~~ zbieżny. Podciąg ten oznaczymy $(f_{n,1}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$.

Teraz zajmiemy się ciągiem $(f_{n,1}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$. Jak poprzednio, jest on ograniczony, więc możemy zeń wybrać podciąg zbieżny, oznaczony $(f_{n,2}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$. Zauważmy, że $(f_{n,2})$ jest podciągiem $(f_{n,1})$, więc ciąg funkcji $(f_{n,2})$ jest zbieżny w x_1 i w x_2.

W ten sam sposób konstruujemy podciąg $(f_{n,3})$ zbieżny w x_1, x_2, x_3 itd: ~~jeżeli~~ wiemy, że $(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $x_1, x_2, \ldots, x_k$, ~~to~~ a ze wspólnej ograniczoności $\mathcal{F}$ ciąg $(f_{n,k}(x_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony – możemy zeń wybrać podciąg $(f_{n,k+1}(x_{k+1}))$ zbieżny.

Zapiszmy te kolejne podciągi w tablicy

$$\begin{matrix} f_{1,1} & f_{2,1} & f_{3,1} & f_{4,1} & \cdots \\ f_{1,2} & f_{2,2} & f_{3,2} & f_{4,2} & \cdots \\ f_{1,3} & f_{2,3} & f_{3,3} & f_{4,3} & \cdots \\ f_{1,4} & f_{2,4} & f_{3,4} & f_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

ciąg występujący w k-tym wierszu jest podciągiem wszystkich poprzednich wierszy. Wiemy też, że jest on zbieżny w $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Przyjrzyjmy się teraz ciągowi $(f_{n,n})$. Zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(f_{n,n})_{n \geq k}$ jest podciągiem ciągu $(f_{n,k})$ — a więc $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ począwszy od k-tego miejsca pokrywa się z pewnym podciągiem ciągu $(f_{n,k})$. Ten ostatni jest zbieżny w $x_1, x_2, \dots, x_k$, a więc $(f_{n,n})$ też jest (jako podciąg) zbieżny w tych punktach. Z dowolności k wynika, że $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny we wszystkich punktach ciągu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Wykażemy teraz, że ciąg $(f_{n,n})$ jest jednostajnie zbieżny w A — sprawdzimy, że spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z równociągłości $\mathcal{F}$ wynika, że istnieje $\delta > 0$ t.ż. $\forall_{f\in\mathcal{F}} \forall_{x,y\in A} \; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.

Z konstrukcji ciągu (x_n) wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ jest δ-siecią w A.

Punktów $x_1, \ldots, x_N$ jest skończenie wiele; dla każdego $k \in \{1, \ldots, N\}$ ciąg $(f_{n,n}(x_k))_n$ jest zbieżny, a więc istnieje m_k takie, że $\forall_{n,m > m_k} \cancel{\forall} \left| f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. (*)

Niech $\tilde{m} = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_N\}$.

Ustalmy teraz $x \in A$; wykażemy, że $\forall_{n,m > \tilde{m}} \left| f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x) \right| < \varepsilon$ (a więc, z dowolności x, $(f_{n,n})$ spełnia jednost. warunek Cauchy'ego).

Wybierzmy spośród $\{x_1, \ldots, x_N\}$ takie x_l, że $|x - x_l| < \delta$.

$$\left| f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x) \right| \leq \left| f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_l) \right| + \left| f_{n,n}(x_l) - f_{m,m}(x_l) \right| + \left| f_{m,m}(x_l) - f_{m,m}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

środkowy składnik jest $< \frac{\varepsilon}{3}$ z (*)

a oba skrajne dlatego, że $|x - x_l| < \delta$, a δ została dobrana do $\frac{\varepsilon}{3}$ ~~w~~ definicji ~~je~~ równociągłości rodziny $\mathcal{F}$.

Wiemy zatem, że z ciągu (f_n) możemy wybrać podciąg spełniający ~~warun~~ jednostajny warunek Cauchy'ego, a więc zbieżny do pewnej $f \in C(A)$.

Dzięki temu, że rodzina $\mathcal{F}$ jest domknięta, wiemy, że $f \in \mathcal{F}$. $\square$.