Twierdzenie (o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych)

Niech $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ dla $n = 1,2,\dots$ będą różniczkowalne i niech ciąg ich pochodnych (f_n') będzie jednostajnie zbieżny na $[a,b]$ do funkcji $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Załóżmy też, że dla pewnego $x_0 \in [a,b]$ $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Wówczas

(1) ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$ do pewnej ciągłej funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

(2) funkcja f jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $f' = g$.

Dowód:

Oznaczmy $F_{n,m} = f_n - f_m : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Na wstępie udowodnimy następujący

Lemat: $\forall_{\eta>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \forall_{x,y} |F_{n,m}(x) - F_{n,m}(y)| \le \eta |x-y|$

Dowód lematu: wystarczy wykazać, że
$$\forall_{\eta>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \sup_{[a,b]} |F_{n,m}'| \le \eta$$
(przypomnienie: (wniosek z tw. Lagrange'a o wart. średniej) Jeżeli $\forall_{x\in A} |h'(x)| \le \alpha$, to h spełnia na A war. Lipschitza ze stałą α).
Wiemy jednak, że $f_n' \rightrightarrows g$ na $[a,b]$, więc (f_n') spełnia warunek Cauchy'ego: $\forall_{\eta>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \forall_{x\in A} |f_n'(x) - f_m'(x)| < \eta$,
więc $\sup_{[a,b]} |f_n' - f_m'| \le \eta$.
$$\sup_{[a,b]} |f_n' - f_m'| = \sup_{[a,b]} |F_{n,m}'|.$$

Teraz wykażemy punkt (1): ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$. Nie znamy jego granicy, więc oczywiście zbadamy, czy (f_n) spełnia na $[a,b]$ jednostajny warunek Cauchy'ego.

Ustalmy $\varepsilon>0$ i wybierzmy n_0 tak, by

$(\cdot)$ dla $n,m>n_0$ $\quad |f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (to jest w. Cauchy'ego dla ciągu $(f_n(x_0))_n$)

oraz $(\cdot\cdot)$ dla $n,m>n_0$ $\quad F_{n,m}$ spełniało na $[a,b]$ warunek Lipschitza ze stałą $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. (dzięki Lematowi wiemy, że takie n_0 istnieje)

Mamy teraz, dla $n,m>n_0$ i dowolnego $x\in[a,b]$

$$|f_n(x)-f_m(x)|=|f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f_m(x_0)+f_m(x_0)-f_m(x)|$$

$$=|f_n(x_0)-f_m(x_0)+F_{n,m}(x)-F_{n,m}(x_0)|$$

$$\leq|f_n(x_0)-f_m(x_0)|+|F_{n,m}(x)-F_{n,m}(x_0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-x_0|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon,$$ skąd (f_n) zbiega jednostajnie

Jego (jednostajną granicę) oznaczmy przez $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Wiemy, że f jest ciągła, bo f_n są różniczkowalne, a więc ciągłe na $[a,b]$.

Pozostaje punkt (2): $f'=g$. Wykażemy to, szacując $* = |I_f(x+h,x)-g(x)|$ dla małych h i ustalonego $x\in[a,b]$.

$$I_f(x+h,x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(trzeba wykazać, że $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\ |h|<\delta \Rightarrow * <\varepsilon$, a więc że $\lim_{h\to0} * = g(x)$)

$$(*) = |I_f(x+h,x) - g(x)| \le |I_f(x+h,x) - I_{f_n}(x+h,x)| +$$
$$+ |I_{f_n}(x+h,x) - g(x)| = (*_1) + (*_2).$$

Oszacujemy najpierw, dla dost. dużych n, wyraz $(*_1)$.

Zauważmy, że $\exists_{n_1} \forall_{n,m>n_1} \quad |F_{n,m}(x+h) - F_{n,m}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot |h|$,
(Lemat)

więc $\left| \frac{F_{n,m}(x+h) - F_{n,m}(x)}{h} \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_m(x+h) - f_n(x) + f_m(x)}{h} \right| = |I_{f_n}(x+h,x) - I_{f_m}(x+h,x)|$$
$$\Big\downarrow m \to \infty$$
$$|I_{f_n}(x+h,x) - I_f(x+h,x)|$$

a więc $|I_{f_n}(x+h,x) - I_f(x+h,x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$, o ile tylko $n > n_1$.

Teraz $(*_2)$:

Wybierzmy n_2 na tyle duże, by $\forall_{n>n_2} |f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (można, bo $f_n' \rightrightarrows g$). Teraz ustalmy δ takie, że $|h| < \delta \Rightarrow |I_{f_n}(x+h,x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (można, bo $I_{f_n}(x+h,x) \xrightarrow[h\to 0]{} f_n'(x)$).

Stąd, dla $n > n_2$ i $|h| < \delta$

$$(*_2) = |I_{f_n}(x+h,x) - g(x)| \le |I_{f_n}(x+h,x) - f_n'(x)| +$$
$$+ |f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon/2.$$

Jeżeli więc w rachunku na górze strony wybraliśmy $n > \max(n_1, n_2)$, to

$$(*) \le (*_1) + (*_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{o ile tylko } |h| < \delta$$

$\square$.

Jeżeli więc mamy ciąg funkcji (f_n) różniczkowalnych na $[a,b]$, to żeby móc stwierdzić, że

$$\forall_{x\in[a,b]} \quad \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

(a więc zamienić kolejność 2 przejścia granicznego!) musimy wiedzieć, że

1. ciąg f_n' jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$
2. ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny dla jakiegoś $x\in[a,b]$.

Warunek 2. jest potrzebny po to, by uniknąć przykładów tego typu: $\forall_n\ f_n(x) \equiv (-1)^n$, wtedy $\forall_n\ f_n' \equiv 0$, zatem $f_n' \rightrightarrows 0$, choć $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ nie istnieje dla żadnego $x\in[a,b]$.

Twierdzenie oczywiście bez trudności można przetłumaczyć na język szeregów funkcyjnych:

<u>Wniosek</u>: Niech, dla $n\in\mathbb{N}$, funkcje $b_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ będą różniczkowalne. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'$ jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$ i dla pewnego $x\in[a,b]$ zbieżny jest szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$, a jego suma jest funkcją różniczkowalną; co więcej $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'$.

Przykłady zastosowania

Przykład 1

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ Dla $x=0$ jest zbieżny (do 0),

$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$; szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[-q,q]$ dla $0<q<1$

(z kryt. Weierstrassa: $\forall |x^n| < |q|^n = q^n$, a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ jest zbieżny).

Stąd szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ jest na $[-q,q]$ jednost. zbieżny.

Do czego?

Oznaczmy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ przez $F(x)$. Wiemy, że $F(0)=0$,

$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Zauważmy, że

$$(F(x)+\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x} + \left(-\frac{1}{1-x}\right) = 0,$$

więc $F(x)+\ln(1-x) = C = const$ na $[-q,q]$

$F(x) = C - \ln(1-x)$, ale skoro $F(0)=0$, to $C=0$

i $F(x) = -\ln(1-x)$.

Z dowolności wyboru $q\in(0,1)$ mamy, że powyższy wzór jest prawdziwy $\forall_{x\in(-1,1)}$.

Przykład 2

Funkcja ζ Riemanna jest nieskończ. wiele razy różniczkowalna na $(1,\infty)$.

Przypomnienie: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Gdy ustalimy $\eta>1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ będzie jednostajnie zbieżny na $[\eta,\infty)$, więc ζ jest ciągła na $[\eta,\infty)$ – ale czy jest różniczkowalna?

$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\frac{1}{n^x}\ln n$, mamy też $\left|-\frac{1}{n^x}\ln n\right| \le \frac{\ln n}{n^\eta}$ dla $x\in[\eta,\infty)$,

a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\eta}$ jest zbieżny, ← Dlaczego? więc z kryt. Weierstrassa szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^x}\ln n\right)$ jest jednost. zbieżny, ~~więc~~

a więc ζ jest różniczkowalna na $[\eta,\infty)$ i $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$

Z dowolności $\eta\in(1,\infty)$ możemy wywnioskować, że ζ jest różniczkowalna na $(1,\infty)$ i $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$.

Ten ostatni szereg jest niemal jednostajnie zbieżny na $(1,\infty)$.

Żeby wykazać dwukrotną różniczkowalność ζ, trzeba sprawdzić, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)''$ jest jednostajnie zbieżny na $[\eta,\infty)$ (czy też: niemal jednost. zbieżny na $(1,\infty)$).

$\left(\frac{1}{n^x}\right)'' = \frac{(\ln n)^2}{n^x}$ i ogólnie $\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)} = \frac{(\ln n)^k}{n^x}\cdot(-1)^k$;

Wystarczy zatem wykazać, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^\eta}$ jest zbieżny — to poprzez kryterium Weierstrassa da jednostajną zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}$, co oznacza, że ζ można k-krotnie zróżniczkować. A $k\in\mathbb{N}$ wzięliśmy dowolnie.

<u>Uwaga</u>: A jak z funkcjami o wartościach zespolonych? Oczywiście możemy dla nich zdefiniować jednostajną zbieżność — wystarczy $|\cdot|$ w definicji traktować jako moduł liczby zespolonej, a nie wartość bezwzględną.

Nie mamy też (na pozór) problemu z definicją pochodnej:

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

$(h\in\mathbb{C})$.

Niestety, dla pochodnej zespolonej i funkcji o wartościach zespolonych nie musi zachodzić twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej!

<u>Przykład:</u> Rozważmy $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$\exp(0) = 1$, $\exp(2\pi i) = 1$, więc

$$\frac{\exp(2\pi i) - \exp(0)}{2\pi i} = 0 \qquad (\doteq \exp'(\xi)\ ?)$$

ale $\exp' = \exp$, a funkcja $\exp$ nie przyjmuje wartości 0 dla żadnej liczby zespolonej!

To kłopot – w dowodzie twierdzenia o różniczkowaniu ciągów potrzebowaliśmy twierdzenia o wartości średniej do dowodu lematu. Okazuje się, że chociaż twierdzenie Lagrange'a dla funkcji o wartościach zespolonych nie zachodzi, to twierdzenie o związku ograniczoności pochodnej z warunkiem Lipschitza – owszem – i to pozwala nam powtórzyć dowód twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych również dla funkcji o wartościach zespolonych:

<u>Twierdzenie:</u> Niech $A \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem wypukłym, $f : A \to \mathbb{C}$ różniczkowalna na A. Wówczas dla dowolnych $z, w \in A$

$$|f(z) - f(w)| \leq \sup_{[z,w]} |f'| \cdot |z - w| .$$

Przez $[z,w]$ oznaczam oczywiście odcinek o końcach z, w na płaszczyźnie zespolonej.

My udowodnimy ciut słabszą, ale wciąż wystarczającą do dowodu Lematu nierówność:

$$|f(z)-f(w)| \le \sqrt{2}\sup_{[z,w]}|f'|\cdot|z-w| \qquad (*)$$

(dowód bez $\sqrt{2}$ mogą Państwo znaleźć np. w skrypcie prof. Streleckiego).

Dowód $(*)$:

Wprowadźmy pomocnicze funkcje:

$h:[0,1]\to\mathbb{C}$ $\qquad h(t)=f(z+t(w-z))$

$\varphi,\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\qquad \varphi(t)=\operatorname{Re}h(t),\ \psi(t)=\operatorname{Im}h(t)$.

Oczywiście $\varphi(0)=\operatorname{Re}f(z)$, $\varphi(1)=\operatorname{Re}f(w)$

$\psi(0)=\operatorname{Im}f(z)$ $\quad \psi(1)=\operatorname{Im}f(w)$

Pochodną po zmiennej t, w odróżnieniu od zespolonej pochodnej (ozn. $'$), oznaczać będziemy kropką:

$$\dot\varphi(t)+i\dot\psi(t)=\dot h(t)=\frac{d}{dt}f(z+t(w-z))\underset{\text{tw. o różniczkowaniu złożenia}}{=}f'(z+t(w-z))\cdot(w-z)$$

Z tw. Lagrange'a zastosowanego do funkcji φ i ψ znajdziemy $\tau\in(0,1)$ t.ż. $\operatorname{Re}(f(w)-f(z))=\varphi(1)-\varphi(0)=\dot\varphi(\tau)$

oraz $\vartheta\in(0,1)$ t.ż. $\operatorname{Im}(f(w)-f(z))=\psi(1)-\psi(0)=\dot\psi(\vartheta)$

$$|f(z)-f(w)|=\sqrt{\operatorname{Re}(f(z)-f(w))^2+\operatorname{Im}(f(z)-f(w))^2}=$$

$$=\sqrt{\dot\varphi(\tau)^2+\dot\psi(\vartheta)^2}\le\sqrt{\dot\varphi(\tau)^2+\dot\psi(\tau)^2+\dot\varphi(\vartheta)^2+\dot\psi(\vartheta)^2}$$

$$=\sqrt{|\dot h(\tau)|^2+|\dot h(\vartheta)|^2}=\sqrt{|f'(z+\tau(w-z))|^2|z-w|^2+|f'(z+\vartheta(w-z))|^2|z-w|^2}$$

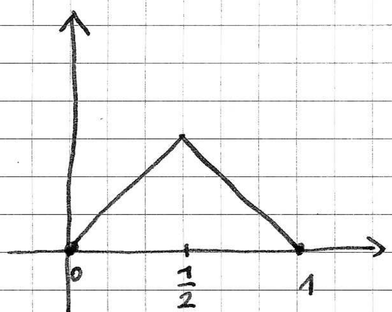
$$\le\sqrt{2\Big(\sup_{[z,w]}|f'|\Big)^2|z-w|^2}=\sqrt{2}\sup_{[z,w]}|f'|\,|z-w|.$$

$\square$.

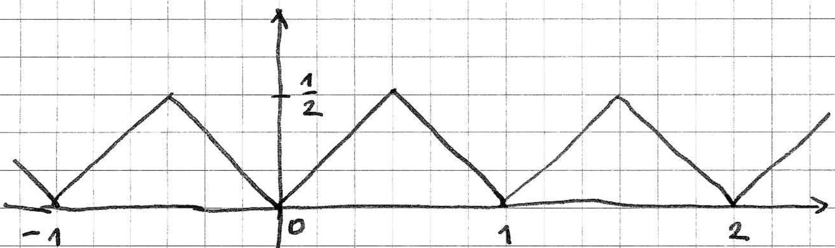
Przykład van der Waerdena funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej

Bartel Leendert van der Waerden
(1903 – 1996)

Rozważmy na $[0,1]$ funkcję $d(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$



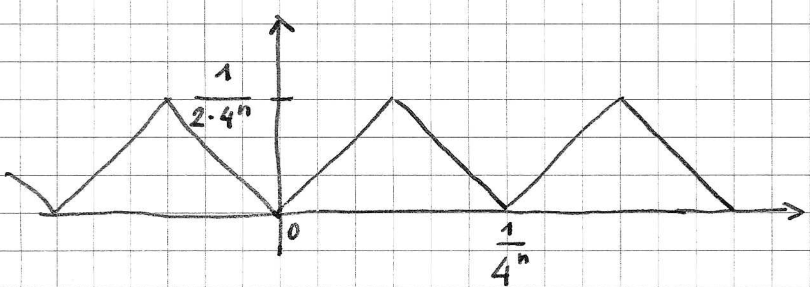
i rozszerzmy ją do funkcji okresowej (dalej oznaczonej przez d), o okresie 1, określonej na $\mathbb{R}$:



Łatwo można sprawdzić, że $d(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$

Jest to oczywiście funkcja ciągła, kawałkami liniowa, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} d(x) = \frac{1}{2}$, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} d(x) = 0$.

Niech teraz $d_n(x) = 4^{-n} d(4^n x)$: $\quad (d_0(x) = d(x))$



$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} d_n(x) = \frac{1}{2\cdot 4^n}$

$\inf d_n(x) = 0.$

Niech teraz $W(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(x)$.

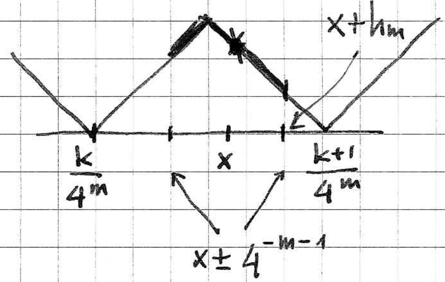
Z kryterium Weierstrassa: $\forall_{x\in\mathbb{R}} \ |d_n(x)| \le \frac{1}{2\cdot 4^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 4^n} < \infty$,

więc szereg definiujący funkcję W jest jednostajnie zbieżny.

To dowodzi, że funkcja W jest ciągła.
Wykażemy teraz, że W nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

Ustalmy bowiem punkt $x \in \mathbb{R}$. Skonstruujemy ciąg (h_m), $0 \neq h_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, taki, że nie istnieje granica $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{W(x+h_m)-W(x)}{h_m}$.

Dla konkretnego, ustalonego m h_m dobieramy tak: popatrzmy, jak w pobliżu x wygląda wykres d_m:



W lewo lub w prawo od x (być może w obie strony) funkcja d_m jest, na odcinku długości $\frac{1}{4^{m+1}}$, liniowa (na rysunku w prawo).

Dobieramy h_m tak, by $|h_m| = \frac{1}{4^{m+1}}$, a znak taki, by d_m była liniowa między x a $x+h_m$

Zauważmy, że jeżeli d_m jest liniowa między x a $x+h_m$, to $\forall_{0 \le n < m}$ d_n też jest liniowa, o wsp. kierunkowym ± 1.

Stąd, $\forall_{n \le m} \quad \frac{d_n(x+h_m)-d_n(x)}{h_m} = \frac{\pm h_m}{h_m} = \pm 1$.

Jeżeli natomiast $n > m$, to funkcja d_n jest okresowa, o okresie $\frac{1}{4^n}$, a więc

$$d_n(x+h_m) - d_n(x) = d_n\left(x \pm 4^{-(m+1)}\right) - d_n(x) =$$
$$= d_n\left(x \pm 4^{n-m-1} \cdot \frac{1}{4^n}\right) - d_n(x) = d_n(x) - d_n(x) = 0.$$

Stąd $\frac{W(x+h_m)-W(x)}{h_m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x+h_m)-d_n(x)}{h_m} = \sum\limits_{n=0}^{m} (\pm 1)$,

ta ostatnia liczba, niezależnie od tego, jak układają się znaki, jest parzysta, gdy m jest nieparzyste, a nieparzysta –

gdy m jest parzyste. Ciąg $\frac{W(x+h_m)-W(x)}{h_m}$ nie może zatem mieć granicy (a powinien być zbieżny do $W'(x)$).

Pierwszy przykład takiej funkcji podał w 1872 roku Karl Weierstrass:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

gdzie $a\in(0,1)$, b jest nieparzystą liczbą naturalną i $ab>1+\frac{3}{2}\pi$.