Kryteria zbieżności jednostajnej

Jednostajny warunek Cauchy'ego

Niech, dla $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$. Ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n,m > n_0} \ \forall_{x \in A} \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Uwaga: warunek $\forall_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ jest

równoważny temu, że $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$,

a więc że $\|f_n - f_m\|_{A,\infty} \leq \varepsilon$,

a to oznacza że jednostajny warunek Cauchy'ego jest zwykłym warunkiem Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n,m > n_0} \ \|f_n - f_m\|_{A,\infty}$$

w sytuacji, gdy funkcje traktujemy jako punkty pewnej przestrzeni, na której odległość dana jest wzorem $d(f,g) = \|f - g\|_{A,\infty}$.

Dowód:

($\Rightarrow$) Wiemy, że $\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n,m > n_0} \ \forall_{x \in A} \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wybierzmy zatem n i m większe od n_0. Mamy

$$\forall_{x \in A} \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

skąd $\forall_{x \in A} \ |f_n(x) - f_m(x)| \overset{\text{n.}\Delta}{\leq} |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| <$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Jednostajny warunek Cauchy'ego pociąga za sobą to, że dla dowolnego $x \in A$ ciąg $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia (zwyczajny) warunek Cauchy'ego, a więc $\forall_{x \in A}$ $(f_n(x))$ jest zbieżny do jakiegoś $f(x)$.

Wiemy zatem, że ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do pewnego $f: A \to \mathbb{R}$.

Wypiszmy jednostajny warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_1} \forall_{n, m > n_1} \forall_{x \in A} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i przejdźmy z m do ∞. Z ciągłości modułu i tego, że $f_m(x) \xrightarrow[m \to \infty]{} f(x)$ dostajemy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_1} \forall_{n > n_1} \forall_{x \in A} \quad |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

co (z definicji) oznacza, że $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Kryterium Weierstrassa

Jeżeli $\forall_{x \in A}$ $|b_n(x)| \le a_n$ oraz szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na A.

Dowód:

Wykażemy, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ spełnia na A jednostajny warunek Cauchy'ego.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, więc jego ciąg sum częściowych spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\exists_{n_0} \forall_{\substack{n, m > n_0 \\ m > n}} \quad \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon$$

(uwaga: $\forall_k$ $a_k \ge 0$, więc moduł niepotrzebny)

Teraz $\forall_{x\in A} \ \forall_{\substack{m,n>n_0 \\ m>n}} \quad \left|\sum_{k=0}^{m} b_k(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| =$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |b_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon .$$

□.

Kryterium Weierstrassa jest bardzo wygodne, ale ma pewne ograniczenia – przede wszystkim przy jego pomocy badamy jedynie jednostajną bezwzględną zbieżność (jeżeli $\sum b_n(x)$ spełnia założenia kryt. Weierstrassa, to $\forall_{x\in A} \sum b_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny).

Przykład zastosowania:
szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest jednostajnie zbieżny na półprostej (a,∞) dla dowolnego $a>1$, gdyż dla $x\in(a,\infty)$

$$\left|\frac{1}{n^x}\right| < \frac{1}{n^a}, \text{ a szereg } \sum \frac{1}{n^a} \text{ jest zbieżny.}$$

Szereg ten definiuje nam bardzo ważną funkcję

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{zeta Riemanna}$$

jedną z najważniejszych funkcji w analitycznej teorii liczb, o zastosowaniach w wielu innych dziedzinach matematyki. Tu zdefiniowaliśmy ją dla $x\in(1,\infty)$; można ją rozszerzyć do funkcji określonej na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$; pytanie o położenie miejsc zerowych tej funkcji jest treścią tzw. hipotezy Riemanna, jednego z najważniejszych otwartych problemów matematyki. (wartego 1M\$ – jest to jeden z Problemów Milenijnych)

Hipoteza Riemanna – postawiona w 1859 przez B. Riemanna; część VIII problemu Hilberta (1900); IV problem milenijny (2000).

Kryteria Abela i Dirichleta jednostajnej zbieżności

Twierdzenie: Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f_n : A \to \mathbb{R}$, $g_n : A \to \mathbb{R}$ i $\forall_{x \in A} f_n(x) \geq 0$. Załóżmy też, że dla każdego $x \in A$ ciąg $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący.

Jeżeli

(Abel) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ jest jednostajnie zbieżny i funkcja f_1 jest ograniczona

LUB

(Dirichlet) sumy częściowe szeregu $\sum g_n$ są wspólnie ograniczone, a ciąg (f_n) jednostajnie dąży do zera

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ jest jednostajnie zbieżny.

Dowód: Sprawdzimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{m > n > n_0} \ \forall_{x \in A} \ \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Ustalmy zatem $\varepsilon > 0$.

Na początek wykażemy, że jeżeli oznaczymy $G_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} g_k$, to sumę $\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k$ możemy przekształcić do:

$$\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) + (G_m - G_n) f_{m+1}.$$

Wzór ten bierze się z dwukrotnego zastosowania przekształcenia Abela (patrz str. 103), by uniknąć przydługich rachunków dowiedziemy jego prawdziwości indukcyjnie.

Indukcja po m

(1) $m = n+1$

Lewa strona jest równa $f_{n+1} g_{n+1}$; prawa

$$\underbrace{(G_{n+1} - G_n)}_{= g_{n+1}}(f_{n+1} - f_{n+2}) + \underbrace{(G_{n+1} - G_n)}_{= g_{n+1}} f_{n+2}$$

i łatwo można sprawdzić, że obie strony są równe.

(2) Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla pewnego m

$$\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) + (G_m - G_n) f_{m+1}$$

Wykażemy, że $\sum_{k=n+1}^{m+1} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{m+1} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) + (G_{m+1} - G_n) f_{m+2}$

Mamy

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k + f_{m+1} g_{m+1} \overset{\text{z.I}}{=} \sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) +$$

$$+ (G_m - G_n) f_{m+1} + f_{m+1} g_{m+1} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m+1} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) - (G_{m+1} - G_n)(f_{m+1} - f_{m+2}) +$$

$$+ (G_m - G_n) f_{m+1} + f_{m+1} g_{m+1} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m+1} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) + (G_{m+1} - G_n) f_{m+2} -$$

$$\underbrace{- (G_{m+1} - G_n) f_{m+1} + (G_m - G_n) f_{m+1} + f_{m+1} g_{m+1}}$$

$$\overset{\uparrow}{=} f_{m+1} \left[- G_{m+1} + G_n + G_m - G_n + g_{m+1} \right] = 0 .$$

$\blacksquare$.

Niech teraz będą spełnione założenia kryterium <u>Abela</u>

Skoro szereg $\sum g_n$ jest zbieżny jednostajnie, to $G_n \rightrightarrows G = \sum_{k=1}^{\infty} g_n$.

Dla ciągu (G_n) zachodzi jednost. warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{k,l>n_0} \forall_{x\in A} \quad |G_k(x) - G_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sup_A f_1}$$

Uwaga: gdy $\sup_A f_1 = 0$, to $\forall_x \forall_n f_n(x) = 0$ i teza zachodzi.

Stąd, dla $m>n>n_0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1})\right| < \frac{\varepsilon}{2\sup f_1} \sum_{k=n+1}^{m} (f_k - f_{k+1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\sup f_1} \underbrace{(f_{n+1} - f_{m+1})}_{\le f_{n+1} \le f_1} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Podobnie $|(G_m - G_n) f_{m+1}| = |G_m - G_n| f_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2\sup f_1} \cdot f_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

i w sumie

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k\right| \overset{n.\Delta}{\le} \left|\sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1})\right| + |(G_m - G_n) f_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o ile $m, n > n_0$

<u>Kryterium Dirichleta</u>

Sumy częściowe szeregu $\sum g_k$ są ograniczone, więc istnieje $M>0$ t.ż. $\forall_{k\in\mathbb{N}} \; |G_k| < M$. Wiemy też, że $f_n \rightrightarrows 0$, więc

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad \sup_A f_n < \frac{\varepsilon}{4M}$$

No, to szacujemy:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1})\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} (|G_k| + |G_n|)(f_k - f_{k+1}) \le$$

$$\le 2M \sum_{k=n+1}^{m} (f_k - f_{k+1}) = 2M(f_{n+1} - f_m) \le 2M \sup_A f_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

o ile tylko $n > n_0$.

Podobnie

$$|G_m - G_n| f_{m+1} \leq 2M \sup_A f_{m+1} < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

i ostatecznie, jak poprzednio, dla $n > n_0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} g_k f_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1})\right| + |G_m - G_n| f_{m+1}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

$\square$

Twierdzenia Diniego

Ulisse Dini (1845–1918)

Pierwsze twierdzenie Diniego

Niech A będzie zbiorem zwartym, $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f_n : A \to \mathbb{R}$.
Załóżmy, że funkcje (f_n) są dla każdego $n\in\mathbb{N}$ ciągłe i że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest punktowo zbieżny do pewnej funkcji $f: A \to \mathbb{R}$, która jest ciągła na A.
Załóżmy dodatkowo, że dla każdego $x\in\mathbb{R}$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący. Wówczas $f_n \rightrightarrows f$.

Uwaga 1 Założenie, że $(f_n(x))_n$ jest niemalejący można oczywiście zastąpić przez „$(f_n(x))$ jest nierosnący" – – zastąpienie, dla każdego $n\in\mathbb{N}$, f_n przez $-f_n$ zamienia ten przypadek na rozważany w twierdzeniu.

Uwaga 2. Założenie o monotoniczności $(f_n(x))$ jest konieczne – patrz Przykład 2., s. 240.

Dowód: Załóżmy przeciwnie – że $f_n \not\rightrightarrows f$, a więc że $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$.

Znajdziemy wówczas, dla pewnego $\varepsilon > 0$, podciąg $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\forall_m \sup\limits_{x\in A} |f_{n_m}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$;

Zbiór A jest zwarty, więc to supremum jest osiągane w pewnym punkcie A. Oznaczmy ten punkt przez x_{n_m} (on nie musi być wyznaczony jednoznacznie!).

Mamy zatem ciąg punktów $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że $|f_{n_m}(x_{n_m}) - f(x_{n_m})| \geq \varepsilon$.

Z ciągu $(x_{n_m})_m$ możemy, dzięki zwartości A, wybrać podciąg $(x_{n_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnego $\tilde{x}\in A$.

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \quad |f_{n_{m_k}}(x_{n_{m_k}}) - f(x_{n_{m_k}})| \geq \varepsilon$$

Wiemy, że ciąg $(f_n(x))$ jest, dla każdego x, niemalejący. Ustalmy $j\in\mathbb{N}$. Wiemy, że $n_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ (bo to podciąg ciągu liczb naturalnych), znajdziemy zatem k taki, że $n_{m_k} \geq j$; wówczas $f_j(x_{n_{m_k}}) \leq f_{n_{m_k}}(x_{n_{m_k}}) \leq f(x_{n_{m_k}})$, więc

$$f(x_{n_{m_k}}) - f_j(x_{n_{m_k}}) \geq f(x_{n_{m_k}}) - f_{n_{m_k}}(x_{n_{m_k}}) \geq \varepsilon$$

$$\downarrow k\to\infty$$

$$f(\tilde{x}) - f_j(\tilde{x})$$

cyli $\forall_{j\in\mathbb{N}} \quad f(\tilde{x}) - f_j(\tilde{x}) \geq \varepsilon$, ale to niemożliwe, bo $f_j(\tilde{x}) \xrightarrow{j\to\infty} f(\tilde{x})$. $\square$

Drugie twierdzenie Diniego

Niech funkcje $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą, dla każdego $n\in\mathbb{N}$, niemalejące i niech ciąg (f_n) zbiega punktowo do funkcji f, ciągłej na $[a,b]$. Wówczas $f_n \rightrightarrows f$.

Uwaga 1 Funkcje niemalejące w sformułowaniu twierdzenia możemy zastąpić (korzystając z zamiany f_n na $-f_n$) przez nierosnące.

Uwaga 2. Zauważmy, że w twierdzeniu nie zakładamy ciągłości funkcji f_n, a jedynie – granicznej funkcji f.

Dowód: Graniczna funkcja f, jako funkcja ciągła na (zwartym) odcinku domkniętym, jest na $[a,b]$ jednostajnie ciągła: (253)

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in[a,b]}\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon>0$ i dobierzmy doń δ jak wyżej. Dzielimy odcinek $[a,b]$ na odcinki długości mniejszej niż δ:

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{k-1}<x_k=b;\quad x_i-x_{i-1}<\delta \text{ dla } i=1,2,\dots,k$$

Ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do f, punktów (x_i) jest skończenie wiele, znajdziemy więc takie n_0, że $\forall_{n>n_0}\ \forall_{i\in\{0,1,\dots,k\}}\ |f_n(x_i)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Zauważmy, że skoro $\forall_n\ f_n$ jest niemalejąca, to również f jest niemalejąca (wiemy, że $\forall_{a\le x<y\le b}\ f_n(x)\le f_n(y)$; przechodząc z n do ∞ dostajemy $f(x)\le f(y)$, o ile $x<y$).

Wybierzmy teraz dowolne $x\in[a,b]$. Istnieje $i\in\{0,1,\dots,k-1\}$ takie, że $x_i\le x\le x_{i+1}$, a zatem $f_n(x_i)\le f_n(x)\le f_n(x_{i+1})$ oraz $f(x_i)\le f(x)\le f(x_{i+1})$.

Oszacujmy

$$f(x)-f_n(x)\le f(x_{i+1})-f_n(x_i)=f(x_{i+1})-f(x_i)+f(x_i)-f_n(x_i)$$
$$\le \underbrace{|f(x_{i+1})-f(x_i)|}_{<\varepsilon/3,\ \text{bo } x_{i+1}-x_i<\delta}+\underbrace{|f(x_i)-f_n(x_i)|}_{<\varepsilon/3\ \text{z założenia}}<\frac{2}{3}\varepsilon$$

Analogicznie

$$f_n(x)-f(x)\le f_n(x_{i+1})-f(x_i)\le f_n(x_{i+1})-f(x_{i+1})+f(x_{i+1})-$$
$$-f(x_i)\le \underbrace{|f_n(x_{i+1})-f(x_{i+1})|}_{<\varepsilon/3}+\underbrace{|f(x_{i+1})-f(x_i)|}_{<\varepsilon/3}$$
$$<\frac{2}{3}\varepsilon.$$

zatem, $\forall_{n>n_0} \forall_{x\in[a,b]} |f(x)-f_n(x)| < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$

cyli $f_n \rightrightarrows f$.

<u>Twierdzenie Weierstrassa</u> (o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami)

Każda funkcja ciągła $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

To bardzo ważne twierdzenie, o licznych zastosowaniach w analizie.

<u>Uwaga</u>: Twierdzenie wystarczy udowodnić w przypadku, gdy $[a,b]=[0,1]$. Niech bowiem $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; zdefiniujmy funkcję $\tilde{f}$: $\tilde{f}(x) = f(a+x(b-a))$, określoną dla $x\in[0,1]$. Jeżeli udowodnimy twierdzenie Weierstrassa na $[0,1]$, to będziemy wiedzieli, że istnieje ciąg wielomianów (P_n) t. że $P_n \rightrightarrows \tilde{f}$ na $[0,1]$, cyli $\sup_{x\in[0,1]} |P_n(x) - f(a+x(b-a))| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Niech teraz, dla $n\in\mathbb{N}$ i $t\in[a,b]$, $Q_n(t) = P_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$. Oczywiście Q_n są wielomianami o wsp. rzeczywistych; $P_n(x) = Q_n(a+x(b-a))$, $\tilde{f}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = f(t)$

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - Q_n(t)| = \sup_{x\in[0,1]} |\tilde{f}(x) - P_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$t = a + x(b-a)$$
$$x = \frac{t-a}{b-a}$$

Dowód: Wskażemy konkretny ciąg wielomianów B_n. Konstrukcja ciągu (B_n) pochodzi od Siergieja Natanowicza Bernsteina i dlatego wielomiany B_n noszą jego nazwisko.

Сергей Натанович Бернштейн
(1880 – 1968)

Definicja: n-tym wielomianem Bernsteina funkcji f nazywamy wielomian

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Wykażemy, że $B_n^f \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1]$.

Potrzebne nam będą 4 własności symboli dwumianowych: 3 tożsamości i 1 nierówność:

(T1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1$

(T2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt$

(T3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 + nt$

(N) Niech $K_{t,\delta} = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|\frac{k}{n} - t\right| \geq \delta\right\}$

Wówczas $\displaystyle\sum_{k\in K_{t,\delta}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{n}\,\frac{t(1-t)}{\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$

(Jest to szczególny przypadek tzw. nierówności Czebyszewa).

Dowody własności (T1) - (T3):

(T1): rozwijamy zgodnie z wzorem dwumianowym
$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

(T2) Łatwo można sprawdzić, że $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, stąd
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = n\sum_{k=1} \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} =$$
$$= nt \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} = nt \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} t^l (1-t)^{(n-1)-l}$$
$$= nt\, [t + (1-t)]^{n-1} = nt$$

(T3) Analogicznie jak (T2), korzystając z własności
$$k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1}.$$

(N) Oszacujemy $n^2\delta^2 \sum_{k\in K_{t,\delta}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.

$$n^2\delta^2 \sum_{k\in K_{t,\delta}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \sum_{k\in K_{t,\delta}} (k-nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$k\in K_{t,\delta} \Rightarrow (k-nt)^2 \geq n^2\delta^2$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} +$$
$$- 2nt \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + n^2t^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} =$$
$$= n(n-1)t^2 + nt - 2n^2t^2 + n^2t^2 = nt(1-t). = (*)$$

z T1, T2, T3

łatwo widzimy, że dla dowolnego $t\in[0,1]$ (a i dla $t\in\mathbb{R}$) $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, więc $(*) \leq \frac{n}{4}$

Dzieląc oszacowanie stronami przez $n^2\delta^2$ otrzymujemy nierówność (N).

No, to czas na dowód, że $B_n^f \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

Funkcja f jest ciągła na $[0,1]$, więc
(1) jest jednostajnie ciągła: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in[0,1]} \; |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

(2) jest ograniczona: $\exists_M \forall_{x\in[0,1]} \; |f(x)|<M$.

Ustalmy $\varepsilon>0$, dobierzmy doń δ jak w (1) i niech M spełnia warunek (2). Dla dowolnego $x\in[0,1]$

$$|f(x)-B_n^f(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\overset{z\,T1}{=} \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k:\,|\frac{k}{n}-x|<\delta}\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{k:\,|\frac{k}{n}-x|\geq\delta \\ \text{czyli } k\in K_{x,\delta}}}\overbrace{\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|}^{\leq 2M}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 2M\sum_{k\in K_{x,\delta}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\underset{z\,T1\,i\,N}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{4n\delta^2} < \varepsilon, \text{ o ile tylko } \frac{M}{2n\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$n \geq \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$$

Kładąc $n_0 = \left[\frac{M}{\varepsilon\delta^2}\right]+1$ mamy

$\forall_{n>n_0} \forall_{x\in[0,1]} \; |f(x)-B_n^f(x)|<\varepsilon$, a więc $B_n^f \rightrightarrows f$ na $[0,1]$

Twierdzenie Weierstrassa pozwala nam przybliżać funkcje ciągłe wielomianami na odcinku domkniętym. A czy zachodzi analogiczne twierdzenie na odcinku otwartym? na całym $\mathbb{R}$?

Przykład 1 Funkcja exp nie jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów na $\mathbb{R}$.

Załóżmy przeciwnie – znajdziemy wówczas wielomian $P(x)$ o tej własności, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; |P(x) - e^x| < 1$ (*)

(w definicji jednost. zbieżności bierzemy $\varepsilon = 1$).

Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$

$$\underbrace{e^x - P(x)}_{} = \underbrace{x^n}_{\substack{x\to+\infty \\ \downarrow \\ +\infty}} \Big(\underbrace{\frac{e^x}{x^n}}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ +\infty}} - a_n - \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 0}} - \ldots - \underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 0}} \Big) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty,$$

co przeczy nierówności (*).

Przykład 2. Funkcja sinus nie jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów na $\mathbb{R}$.

Zauważmy najpierw, że funkcją stałą nie można przybliżyć sinusa na $\mathbb{R}$ z dokładnością większą niż $\frac{1}{2}$, więc jeżeli wielomian $P(x)$ spełnia

(*) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; |\sin x - P(x)| < \frac{1}{2}$, to P jest stopnia >0.

$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$

Teraz $\lim_{x\to\infty} (P(x) - \sin x) = \cancel{x^n(a}$

$= \lim_{x\to\infty} x^n \left(a_n - \frac{\sin x}{x^n}\right) = \operatorname{sgn} a_n \cdot (+\infty)$

(czyli $\pm\infty$, w zależności od znaku a_n)

co oczywiście przeczy (*).

Zadanie: Wykaż, że $\sin\frac{1}{x}$ nie jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów na $(0,1)$.

Definicja: Mówimy, że ciąg funkcji (f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny na A, jeżeli ciąg ten jest jednostajnie zbieżny na każdym zwartym podzbiorze zbioru A.

Twierdzenie: Dla dowolnego przedziału (a,b), $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ i funkcji f ciągłej na (a,b) istnieje ciąg wielomianów (W_n) zbieżny niemal jednostajnie do f na (a,b).

Dowód: Przypadek $(a,b)=\emptyset$ jest trywialny, możemy więc założyć, że $a<b$.
Niech teraz (a_n) będzie malejącym ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; (b_n) – rosnącym ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i dodatkowo założymy, że $a_1<b_1$ (wtedy $\forall_n\ a_n<b_n$).

Na każdym z przedziałów $[a_n,b_n]$ możemy przybliżyć funkcję f wielomianem z dowolną zadaną dokładnością (tw. Weierstrassa), niech więc W_n będzie wielomianem spełniającym

$$\forall_{x\in[a_n,b_n]}\quad |f(x)-W_n(x)|<\frac{1}{n}.$$

Wykażemy, że ciąg $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do f na (a,b).

Niech bowiem $K \subset (a,b)$ będzie zbiorem zwartym.

Oznaczmy

$h(x)=x-a$ przyjmuje na K minimum (tw. Weierstrassa)

$$l_K = \begin{cases} a + \frac{1}{2}\inf_{x\in K}(x-a) = a + \frac{1}{2}\min_{x\in K}(x-a) & a\in\mathbb{R} \\ \inf_{x\in K} x - 1 = \min_{x\in K} x - 1 & a=-\infty \end{cases}$$

jak wyżej

$$p_K = \begin{cases} b - \frac{1}{2}\min_{x\in K}(b-x) & b\in\mathbb{R} \\ \max_{x\in K} x + 1 & b=+\infty \end{cases}$$

Zauważmy, że $l_K > a$ i $p_K < b$ (dlaczego?) oraz $K \subset [l_K, p_K] \subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$ dla dost. dużego n_0.

Skoro $W_n \rightrightarrows f$ na $[a_{n_0}, b_{n_0}]$, to również $W_n \rightrightarrows f$ na K. $\square$

<u>Uwaga:</u> Analogiczny dowód zadziała na przedziałach $[a,b)$ i $(a,b]$, trzeba tylko w miejsce malejącego ciągu (a_n) przyjąć $\forall_n\, a_n = a$ (w przypadku $[a,b)$) lub w miejsce rosnącego ciągu (b_n) – ciąg (b_n) stale równy b (dla przedziału $(a,b]$).