Czy $\lim\limits_{a\to 0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(a) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{a\to 0} \alpha_k(a)$?

Zamieniamy tu ze sobą dwie granice; ta druga ukryta jest w definicji $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ jako granicy ciągu sum częściowych. To nie zawsze jest dozwolone; przekonamy się, że rzeczywiście $\lim\limits_{a\to 0} \frac{f(a,x)-1}{a} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, ale trzeba to starannie sprawdzić.

Oszacujmy najpierw „ogon" szeregu $(**)$:

$$(1-a)\left(1-\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{k-1}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } e^\alpha \geq 1+\alpha}}{\leq} e^{-a}\cdot e^{-\frac{a}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{-\frac{a}{k-1}} =$$

$$= e^{-a\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)}$$

Interesuje nas a bliskie 0, możemy więc założyć, że $|a|<\frac{1}{2}$; $\leq e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)} \leq e^{\frac{1}{2}\ln k} = \sqrt{k}$.

Stąd $\left|(1-a)\cdots\left(1-\frac{a}{k-1}\right)\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leq \frac{|x|^k}{\sqrt{k}}$,

szereg $\sum \frac{|x|^k}{\sqrt{k}}$ jest zbieżny dla $x\in(-1,1)$ i

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_1}\ \forall_{n>n_1}\ \underbrace{\left|\sum_{k=n}^{\infty}(1-a)\cdots\left(1-\frac{a}{k-1}\right)\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|}_{=A_n} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x|^k}{\sqrt{k}} < \varepsilon$$

(przy ustalonym $x\in(-1,1)$).

Podobnie ogon szeregu $(**)$: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_2}\ \forall_{n>n_2}$

$$B_n := \left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo taki szereg} \\ \text{jest bezwzgl. zbieżny.}}}{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}} < \varepsilon$$

Pozostaje nam oszacować $|(**)-(*)|$: Niech $n>\max(n_1,n_2)$

$$|(**)-(*)| \leq \left|\sum_{k=1}^{n-1}\left[(1-a)\left(1-\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{k-1}\right)-1\right]\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| + A_n + B_n$$

Pod modułem nie mamy już szeregu, tylko skończoną sumę, więc dla a dost. bliskich 0 ~~mamy~~ (tj $|a|<\delta$ dla pewnego $\delta>0$) mamy $\left|\sum_{k=1}^{n}\left[(1-a)\cdot\ldots\cdot(1-\frac{a}{k-1})-1\right]\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|<\varepsilon$

i ostatecznie, dla $|a|<\delta$ $\quad |{**}-{*}|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$, co dowodzi, że $\lim_{a\to 0} {**} = {*}$.

$$\lim_{a\to 0}\frac{f(a,x)-1}{a}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=:A(x).$$

Stąd $\quad f(a,x)=e^{A(x)\cdot a}$.

Zauważmy teraz, że gdy $a=1$, mamy $\binom{a}{0}=1$, $\binom{a}{1}=1$, $\forall_{k>1}\ \binom{a}{k}=0$, a więc

$$f(1,x)=1+x$$

a z drugiej strony $f(1,x)=e^{A(x)\cdot 1}=e^{A(x)}$

To dowodzi, że $\quad e^{A(x)}=1+x$, czyli $A(x)=\ln(1+x)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k=f(a,x)=e^{a\ln(1+x)}=(1+x)^a$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=A(x)=\ln(1+x).$$

Dla dowolnych $x\in(-1,1)$.

Uzupełnienia o funkcjach wypukłych

Tw. Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie różniczkowalna na (a,b). Nast. warunki są równoważne

(1) $\forall_{x,y\in(a,b)}\quad f(y)\geq f(x)+f'(x)(y-x)$

(2) f jest wypukła na (a,b)

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2)

Niech $x<y$, $z\in(x,y)$; $z=\alpha x+(1-\alpha)y$ dla pewnego $\alpha\in(0,1)$.

$x-z=(1-\alpha)(x-y)$

$y-z=\alpha(y-x)$

Wiemy, że

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq f(z)+f'(z)(x-z) && /\cdot\alpha\\
+\quad f(y) &\geq f(z)+f'(z)(y-z) && /\cdot(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) &\geq \alpha f(z)+\alpha f'(z)(x-z)+(1-\alpha)f(z)\\
&\quad+(1-\alpha)f'(z)(y-z)=\\
&=f(z)+\alpha(1-\alpha)f'(z)(x-y)+(1-\alpha)\alpha f'(z)(y-x)\\
&=f(z)=f(\alpha x+(1-\alpha)y)
\end{aligned}
$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

~~Niech $y>x$; wi~~ Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $y>x$. Wiemy, że dla $t\in(x,y)$

$$I(x,t)\leq I(x,y)$$

zatem w szczególności

$$f'(x)=\lim_{t\to x}I(x,t)\leq I(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

a ta nierówność jest równoważna warunkowi z (1). □

To twierdzenie formalizuje uwagę z poprzedniego przykładu: styczna do wykresu funkcji wypukłej leży zawsze pod wykresem funkcji.

<u>Wniosek</u>: Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie wypukła, $x_0\in(a,b)$. Jeżeli $f'(x_0)=0$, to f ma w x_0 minimum globalne na (a,b).

<u>Dowód</u>: $\forall_{y\in(a,b)}\ f(y)\geq f(x_0)+f'(x_0)(y-x_0)=f(x_0)$. □

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli funkcja wypukła f ma minimum lokalne w x_0 i w x_1, $\underset{x_0<x_1}{x_0,x_1\in(a,b)}$, to jest stała na odcinku $[x_0,x_1]$.

<u>Dowód</u>: Niech $t\in(x_0,x_1)$. Dobierzmy $\varepsilon>0$ tak, by
$$f(x_0)\leq f(x_0+\varepsilon)$$
$$f(x_1)\leq f(x_1-\varepsilon)$$
oraz $x_0+\varepsilon<\cancel{x_1-\varepsilon}\ t<x_1-\varepsilon$.

Wówczas
$$I(x_0,x_0+\varepsilon)=\frac{\overbrace{f(x_0)-f(x_0+\varepsilon)}^{\leq 0}}{\underbrace{x_0-(x_0+\varepsilon)}_{<0}}\geq 0$$
$$I(x_1,x_1-\varepsilon)=\frac{\overbrace{f(x_1)-f(x_1-\varepsilon)}^{\leq 0}}{\underbrace{x_1-(x_1-\varepsilon)}_{>0}}\leq 0$$

ale $\cancel{0\leq I(x_0,x_0+\varepsilon)\leq I(x_1,x_1-\varepsilon)\leq I(x_1,x_1-\varepsilon)\leq 0}$

~~więc~~ $\cancel{I(x_0,x_0+\varepsilon)\leq 0,\ I(x_1,x_1-\varepsilon)\leq 0}$

~~Niech teraz~~ $\cancel{t\in(x_0,x_1)}$. ~~Mamy~~ $\cancel{(1)\ t\geq x_0+\varepsilon}$ ~~lub~~ $\cancel{(2)\ t\leq x_1-\varepsilon}$,

~~więc~~ $\cancel{(1)\ I(x_0,x_0+\varepsilon)\leq I(x_0,t)\leq}$ ~~Poprawmy teraz~~

$\cancel{\varepsilon>0}$, ~~lecz zmniejszając je tak, by~~ $\cancel{t\in(x_0+\varepsilon,x_1-\varepsilon)}$.

wtedy $0\leq I(x_0,x_0+\varepsilon)\leq I(x_0,t)\leq I(x_1,t)\leq$
$$\leq I(x_1,x_1-\varepsilon)=0$$

skąd $I(x_0,t)=0 \iff f(x_0)=f(t)$.

$I(x_1,t)=0 \iff f(x_1)=f(t)$.

□.

<u>Zadanie</u>: f wypukła na $[a,b]$, to $\max_{[a,b]} f \in \{f(a), f(b)\}$.

<u>Zasadnicze twierdzenie algebry</u>

Wielomian o współczynnikach zespolonych, stopnia co najmniej 1, ma pierwiastek (zespolony).

Próby (nieudane lub niekompletne) dowodu: m.in.

d'Alembert	1746	
Euler	1749	
Lagrange	1772	
Laplace	1795	
Gauss	1799	(doktorat Gaussa)

Pierwszy ścisły dowód – Jean Robert Argand, 1806

J.R. Argand (1768–1822) – paryski księgowy, matematyk-amator.

Niedługo potem kilka różnych dowodów podał Gauss; przedstawię Państwu jeden z nich.

<u>Dowód</u>: Załóżmy, że $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ nie ma pierwiastka.

Jest oczywistym, że każdy wielomian stopnia 1 ma pierwiastek zespolony ($\alpha z + \beta = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{\beta}{\alpha}$), więc możemy założyć, że $n > 1$.

<u>Krok 1</u> Wykażemy, że istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ tż.

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|.$$

Niech $R > \dfrac{2\cancel{\max}\{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|\}\cancel{+1}}{|a_n|} + 1$

Wówczas dla $z : |z| > R$ mamy

$$|P(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| = |z|^n \left(\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots \right| \right)$$

$$\geqslant |z|^n \left(|a_n| - \left(\frac{|a_{n-1}|}{R} + \frac{|a_{n-2}|}{R^2} + \ldots + \frac{|a_0|}{R^n} \right) \right) \geqslant$$

235

$$\geqslant R^n \left(|a_n| - \frac{1}{R} \left(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0| \right) \right)$$

$$\geqslant R^n \left(|a_n| - \frac{1}{2} |a_n| \right) \geqslant \frac{1}{2} R |a_n| \geqslant 2 \left(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0| \right)$$

$$\geqslant |a_0| = |P(0)| \, ;$$

Kula $B(R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$ jest zwarta, więc istnieje $z_0 \in B(R)$ $\inf_{B(R)} |P(z)| = P(z_0)$; z drugiej strony

$$\forall_{z \in \mathbb{C} \setminus B(R)} \quad |P(z)| \geqslant |P(0)| \geqslant \inf_{B(R)} |P(z)| = P(z_0),$$

więc $|P(z_0)| = \inf_{\mathbb{C}} |P(z)|$.

Gdyby $|P(z_0)| = 0$, to $P(z_0) = 0$ i z_0 byłoby pierwiastkiem P. Załóżmy zatem, że $P(z_0) \neq 0$.

Krok 2 Przesuniemy i przeskalujemy P tak, by dostać analogiczny wielomian, ale z $z_0 = 0$ i z dodatnią wartością w 0:

stała!

Niech $Q(z) = P(z + z_0) \overline{P(z_0)}$

Wtedy $Q(0) = P(z_0) \overline{P(z_0)} > 0$

$$|Q(0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)|.$$

Krok 3 ~~Rozważmy równanie $z^k = $~~

Niech $Q(z) = b_0 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \ldots + b_n z^n$;

$b_k \neq 0$, $b_n \neq 0$. Wiemy, że $b_0 = Q(0) > 0$.

Rozważmy równanie $z^k = -\overline{b_k}$

Ma ono k różnych rozwiązań (wiadomo, jak ich szukać); niech ξ będzie jednym z nich.

Niech teraz $\varepsilon > 0$ (dostatecznie małe; jakie? – zobaczymy). $|\zeta| = |b_k|^{1/k}$

$$|Q(\varepsilon\zeta)| = |b_0 + b_k(\varepsilon\zeta)^k + (\varepsilon\zeta)^{k+1}[b_{k+1} + (\varepsilon\zeta)b_{k+2} + \ldots + (\varepsilon\zeta)^{n-k-1}b_n]|$$

$$\overset{n.\Delta}{\leq} |b_0 + b_k(\varepsilon\zeta)^k| + |(\varepsilon\zeta)^{k+1}|\,[|b_{k+1}| + |\varepsilon\zeta||b_{k+2}| + \ldots + |\varepsilon\zeta|^{n-k-1}|b_n|]$$

$$= |b_0 - b_k\overline{b_k}\,\varepsilon^k| + \varepsilon^{k+1}|b_k|^{\frac{k+1}{k}}[|b_{k+1}| + \varepsilon|b_k|^{1/k}|b_{k+2}| + \ldots + \varepsilon^{n-k-1}|b_k|^{n-k-1/k}\cdot|b_n|]$$

Niech $B = |b_k|^{k+1/k}[|b_{k+1}| + |b_k|^{1/k}|b_{k+2}| + \ldots + |b_k|^{n-k-1/k}|b_n|] \geq 0$

Jeżeli $\varepsilon < 1$, to

$$|Q(\varepsilon\zeta)| \leq |b_0 - |b_k|^2\varepsilon^k| + \varepsilon^{k+1}B$$

Teraz przyjrzyjmy się wyrażeniu $b_0 - |b_k|^2\varepsilon^k$.
Jeżeli tylko $\varepsilon < \sqrt[k]{\frac{b_0}{|b_k|^2}}$, to jest to liczba dodatnia i moduł jest niepotrzebny.

$$|Q(\varepsilon\zeta)| \leq b_0 - |b_k|^2\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1}B$$

A teraz rozważmy $-|b_k|^2\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1}B$.

$$-|b_k|^2\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1}B = \varepsilon^k(-|b_k|^2 + \varepsilon B)$$

Jeżeli $B=0$, to oczywiście wyrażenie to jest ujemne; a jeżeli $B>0$, to jest ujemne, o ile tylko $\varepsilon < \frac{|b_k|^2}{B}$.

Jeżeli zatem $\varepsilon < \min\left(1, \sqrt[k]{\frac{b_0}{|b_k|^2}}, \frac{|b_k|^2}{B}\right)$, to

$$|Q(\varepsilon\zeta)| \leq b_0 \underbrace{- |b_k|^2\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1}B}_{\text{ujemne}} < b_0 = |Q(0)|$$

i mamy sprzeczność, bo $|Q(0)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)|$.

Ciągi i szeregi funkcyjne

Wielokrotnie rozważaliśmy ciągi (a_n) i szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, w których wyrazy zależały nie tylko od indeksu n, ale również od pewnego parametru. Definiowaliśmy funkcję exp jako granicę ciągu wielomianów $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (albo jako sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$), podobnie zrobiliśmy z funkcjami trygonometrycznymi; zastanawialiśmy się, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest zbieżny itp.

Pamiętają też pewnie Państwo, że zbadanie tego, jak funkcja exp zależy od x (ciągłość; różniczkowalność) wymagało sporo pracy. Wyrazy ciągu definiującego exp; $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, są bardzo przyzwoitymi funkcjami – i taką też funkcją (nieskończenie wiele razy różniczkowalną) jest jego granica. Czy to jest ogólna własność? Czy granice ciągów funkcji ciągłych / różniczkowalnych są funkcjami ciągłymi? różniczkowalnymi? A może wymaga to jakichś dodatkowych założeń?

Przykład: Niech $f_n(x) = x^n$; $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Dla każdego $x \in [0,1]$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny; mamy oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Funkcja graniczna jest nieciągła!

Niech dla $n \in \mathbb{N}$ $f_n : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest pewnym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Dwie ważne definicje:

Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo na A do funkcji f, jeżeli dla każdego $x \in A$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(x)$.

Symbolicznie: $\forall_{x\in A} \ \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n>n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Piszemy wówczas: $f_n \longrightarrow f$

Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie na A do funkcji f, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{x\in A} \ \forall_{n>n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

W zbieżności jednostajnej dobieramy n_0 do ε w taki sposób, że dobór ten jest właściwy dla wszystkich $x \in A$. W zbieżności punktowej sposób, w jaki dobieramy n_0 do ε może zależeć od punktu x.

Gdy f_n zbiega do f jednostajnie, oznaczamy to $f_n \rightrightarrows f$.

Uwaga: Ciąg (f_n) zbiega jednostajnie do f na A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| =: d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dowód: Jeżeli $f_n \rightrightarrows f$, to z definicji $\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{x\in A} \ \forall_{n>n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, więc dla $n > n_0$

$$0 \leq d_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$ a to z def. oznacza, że $d_n \longrightarrow 0$.

Jeżeli natomiast $d_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |d_n| < \varepsilon$,

więc $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

skąd wynika, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

czyli $f_n \rightrightarrows f$. $\square$

Ciąg z przykładu był oczywiście zbieżny ~~do~~ punktowo do $f(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,1) \\ 1 & x = 1. \end{cases}$ Czy $f_n \rightrightarrows f$?

Załóżmy, że tak jest. Ustalmy $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ i dobierzmy n_0 do ε. Powinniśmy mieć, dla $n>n_0$, i dowolnego $x\in[0,1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

A jednak, dla $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$, mamy $f_n(x) = \frac{1}{2}$; $f(x) = 0$ czyli

$$\frac{1}{2} = |f_n(x) - f(x)| \not< 1/2 .$$

Ciąg (f_n) nie jest więc zbieżny jednostajnie.

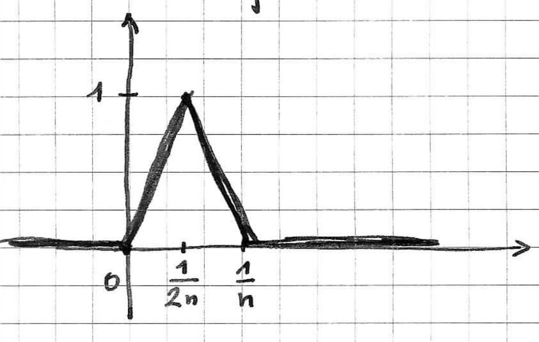
<u>Twierdzenie</u>: Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych na $A\subset \mathbb{R}$, zbieżnym jednostajnie do pewnej funkcji f. Wówczas f jest ciągła na A.

Ciąg z przykładu nie mógł więc być jednostajnie zbieżny do funkcji granicznej, bo wyrazy ciągu były funkcjami ciągłymi na $[0,1]$, a funkcja graniczna – nie.

Nim udowodnimy to ważne twierdzenie, przyjrzyjmy się jeszcze jednemu przykładowi:

Przykład 2

Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{dla } x \in [0,(2n)^{-1}] \\ 2-2nx & \text{dla } x \in [(2n)^{-1}, n^{-1}] \\ 0 & \text{w pozostałych punktach osi rzeczywistej.} \end{cases}$



Zauważmy, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (dlaczego?)

Mamy więc $f_n \longrightarrow 0$; funkcja graniczna, podobnie jak wyrazy ciągu, jest funkcją ciągłą.

Czy $f_n \rightrightarrows f$?

Nie: $d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1 \not\to 0.$

Dowód twierdzenia: Ustalmy $x \in A$. Chcemy wykazać, że funkcja graniczna f jest ciągła w punkcie x, a więc że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{y\in A} \; |x-y|<\delta \overset{?}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$

Wybierzmy $\varepsilon>0$ i dobierzmy doń n_0 takie, by $\forall_{n>n_0} \forall_{z\in A} \; |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$

Weźmy teraz jakiekolwiek $m > n_0$. Funkcja f_m jest ciągła, możemy więc znaleźć takie $\delta>0$, że

N X $\quad \forall_{y\in A} \; |x-y|<\delta \Rightarrow |f_m(x) - f_m(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$

Mamy zatem, o ile tylko $|x-y|<\delta$,

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_m(x)| + |f_m(x)-f_m(y)| + |f_m(y)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{D.}$$

Uwaga: Nic dotąd nie powiedziałem o szeregach; szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ jest zbieżny punktowo/jednostajnie wtedy, gdy jego ciąg sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ jest zbieżny punktowo/jednostajnie.

Przykład 3

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny jednostajnie na dowolnym ograniczonym podzbiorze $\mathbb{R}$, ale nie jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$! (oczywiście wiemy, do czego jest zbieżny punktowo na $\mathbb{R}$).

Niech $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $S(x) = \exp(x)$.

Wiemy, że $|S_n(x) - S(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}|$

Niech teraz $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym, a więc $\exists_{M>0}$ tż. $A \subset [-M, M]$. Wtedy

$$\forall_{x \in A} \quad |S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!} - \exp(M)\right| =$$

$$= |S_n(M) - S(M)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

bo skądinąd wiemy, że $\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(M)$

i w szczególności

$$0 \le d_n = \sup |S_n(x) - S(x)| \le \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!} - \exp(M)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

co dowodzi, że $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze A.

Załóżmy teraz, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie na całym $\mathbb{R}$, a więc że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Ustalmy $\varepsilon = 1$ i odpowiedni dlań n_0.

Dla dowolnego $m > n_0$ mamy mieć, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,

$$\varepsilon = 1 > |S_m(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right|.$$

Weźmy $x_0 = [(m+1)!]^{1/m+1}$.

$$|S_m(x_0) - S(x_0)| = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x_0^k}{k!} > \frac{x_0^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{(m+1)!}{(m+1)!} = 1$$

$\lightning$

<u>Interpretacja zbieżności jednostajnej</u>.

Jak wyliczaliśmy, $f_n \rightrightarrows f \iff \sup_x (|f_n(x) - f(x)|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Wielkość $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ możemy zinterpretować jako swego rodzaju „odległość" funkcji f i f_n:

$$d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| \qquad f,g : A \to \mathbb{R}.$$

Rzeczywiście, wielkość ta ma 3 podstawowe własności, których oczekiwalibyśmy od odległości:

(1). Jeżeli $d(f,g) = 0$, to $\forall_{x \in A}\ f(x) = g(x)$ (oczywiste)

(2) Dla wszystkich funkcji $f,g : A \to \mathbb{R}$
$$d(f,g) = d(g,f)$$

(3) Dla wszystkich funkcji $f,g,h : A \to \mathbb{R}$ zachodzi „nierówność trójkąta": $d(f,g) \le d(f,h) + d(g,h)$.

Dowodu wymaga tylko punkt (3). Zauważmy, że dla dowolnego $x \in A$

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \le \sup_A |f-h| + \sup_A |g-h| = d(f,h) + d(g,h).$$

stąd $d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)| \leq d(f,h) - d(g,h)$.

Z tą odległością bywają też problemy – niech np. $A=\mathbb{R}$.
Jaka jest odległość funkcji $f(x)=x$ od funkcji $g(x)\equiv 0$?

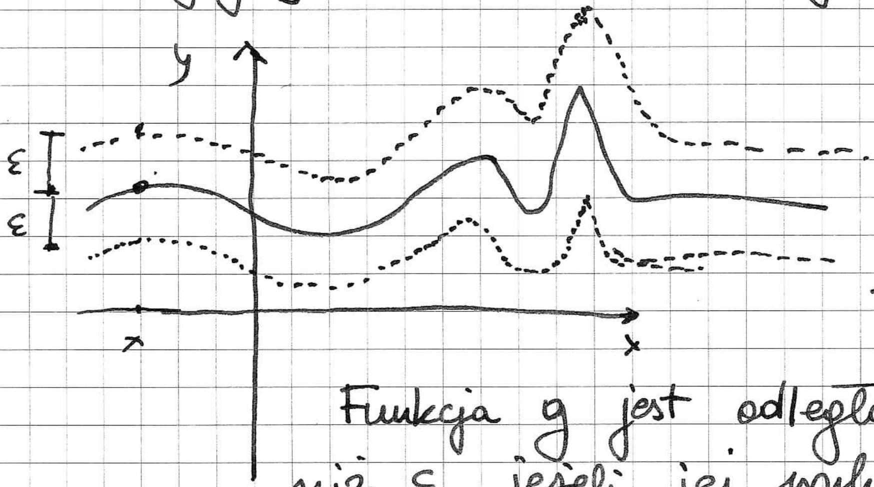
$$d(f,g) = \sup_{x\in A} |x-0| = +\infty.$$

Jeżeli jednak zbiór A jest zwarty, a funkcje f i g – ciągłe, to $d(f,g) \leq d(f,0) + d(g,0)$

$$= \sup_A |f| + \sup_A |g| < +\infty,$$

bo funkcje $|f|$ i $|g|$, jako ciągłe, przyjmują na A swoje suprema; w szczególności suprema te są skończone.

Jak wyobrazić sobie zbiór funkcji odległych o co najwyżej ε od zadanej funkcji f?



Rysujemy pasek o szerokości pionowej 2ε, między wykresami funkcji $f+\varepsilon$ i $f-\varepsilon$.

Funkcja g jest odległa od f o nie więcej niż ε, jeżeli jej wykres leży w tym pasku.