<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0$ i $f'(x_0) > 0$, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\forall_{\delta \in (0,\varepsilon)}$ $f(x_0-\delta) < f(x_0) < f(x_0+\delta)$ (tj na prawo od $x_0$ $f$ przyjmuje wartości większe, niż w $x_0$, a na lewo – mniejsze).

<u>Dowód</u>:

$$0 < f'(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta},$$ więc dla małych $|\delta|$ iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$ jest dodatni, a więc licznik i mianownik mają ten sam znak.

<u>Twierdzenie Rolle'a o wart. średniej</u>

Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła na $[a,b]$ $(a<b)$ i różniczkowalna na $(a,b)$ oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.

Michel Rolle (1652–1719) – francuski matematyk. Syn sklepikarza, początkowo pracował jako asystent notariusza, później – asystent adwokata. W 1675 roku wyjechał do Paryża, szukać pracy jako skryba i rachmistrz. Matematyki uczył się sam; w Paryżu klepał biedę, póki nie opublikował rozwiązania pewnego problemu teorioliczbowego, postawionego publicznie przez znanego matematyka J. Ozanama. To zwróciło na niego uwagę sekretarza stanu J.-B. Colberta – min. finansów i sekretarza stanu – min. wojny, markiza de Louvois. Ten ostatni zatrudnił go jako nauczyciela dla swego syna i był patronem Rolle'a przez wiele lat.

Rolle wprowadził kilka używanych do dziś oznaczeń, m.in $\sqrt[n]{x}$ na n-ty pierwiastek z x; bodaj jako pierwszy używał algorytmu Euklidesa do szukania wspólnego dzielnika dwóch wielomianów; wprowadził pochodną wielomianu (algebraicznie, bez granic); używał jej do przybliżonego obliczania pierwiastków. Mocno krytykował wprowadzany za jego życia rachunek różniczkowy („analizę nieskończenie małych wielkości") – jego zmyślne przykłady przyczyniły się do głębszego zrozumienia owych metod.

<u>Dowód tw. Rolle'a</u>

Z tw. Weierstrassa wiemy, że f przyjmuje na $[a,b]$ wartości największą i najmniejszą. Jeżeli którakolwiek z nich przyjmowana jest w punkcie $\xi\in(a,b)$, to pochodna f w $\xi$, na mocy tw. Fermata, jest równa zeru. Pozostaje nam zatem przypadek, gdy zarówno maksimum, jak i minimum f przyjmowane są w punktach a i b – ale wówczas

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) = f(b) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \text{ a więc}$$

funkcja f jest stała na $[a,b]$ i w KAŻDYM punkcie $\xi\in(a,b)$ $f'(\xi)=0$.

<u>Uwaga</u> (do tw. Fermata) To, że w jakimś punkcie $\xi$ mamy $f'(\xi)=0$ nie oznacza jeszcze, że f ma w $\xi$ ekstremum lokalne

(czyli wartość największą lub najmniejszą na przedziale $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon>0$).
Na przykład dla $f(x)=x^3$ $f'(0)=0$, choć $f$ jest funkcją ściśle rosnącą (i jako taka nie ma ekstremów lokalnych).

Tw Rolle'a jest pierwszym z całej serii tzw. twierdzeń o wartości średniej (ew. pośredniej), tu poznamy 2, blisko z tw. Rolle'a związane:

<u>Twierdzenie Cauchy'ego o wart. średniej</u>

Niech funkcje $f$ i $g$ będą ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na $(a,b)$ i dodatkowo niech $\forall_{x\in(a,b)}\ g'(x)\neq 0$. Wówczas istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

<u>Dowód</u>: Rozważmy pomocniczą funkcję

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

Zauważmy, że $h$ jest ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna na $(a,b)$ oraz $h(a)=h(b)=0$.
Z tw. Rolle'a istnieje zatem $\xi\in(a,b)$ tż. $h'(\xi)=0$.

$$0=h'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ \square.$$

W praktyce najistotniejszy przypadek tw. Cauchy'ego otrzymujemy kładąc $g(x)=x$. Otrzymujemy (203) w ten sposób $(g'(x)\equiv 1)$

<u>Tw. Lagrange'a o wart. średniej</u>: Niech $f$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $(a,b)$. Istnieje wówczas $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

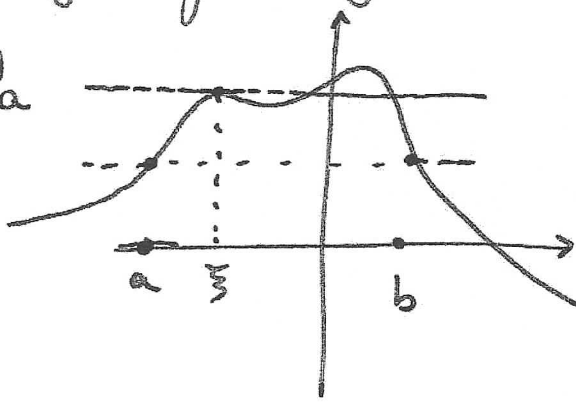
Joseph Louis Lagrange (1736–1813), właśc. Giuseppe Lodovico Lagrangia (choć sam Lagrange używał francuskiej wersji nazwiska) był synem urzędnika w Turynie, tam też studiował. Długo by pisać o jego zasługach dla matematyki – zawdzięczamy mu przede wszystkim pierwszy systematyczny wykład mechaniki teoretycznej, podwaliny rachunku wariacyjnego, wiele wyników w teorii równań różniczkowych, a także początki teorii grup. Zapraszany wielokrotnie do wiodących ośrodków naukowych Europy opuścił (po wielu odmowach) Turyn w 1766 roku i objął ~~tam~~ w Berlinie pozycję Dyrektora Matematyki w Akademii Berlińskiej, opuszczoną przez Eulera. Wielokrotnie zdobywał nagrody w prestiżowych konkursach Akademii Paryskiej; po śmierci Fryderyka II przeniósł się w 1787 r. do Paryża. Cudem uszedł śmierci podczas Rządów Terroru; po rewolucji wykładał do śmierci w École Polytechnique.

Dlaczego twierdzenia te nazywa się twierdzeniami o wart. średniej? (pośredniej – łatwiej zrozumieć).

Przyjrzyjmy się tw. Lagrange'a i zastosujmy je do funkcji przebytej drogi $s$ jako funkcji czasu $t$. Wówczas $s(b)-s(a)$ to dystans, jaki przebyliśmy od chwili $a$ do chwili $b$; $\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$ to średnia prędkość na tym dystansie, a $s'(t)$ to prędkość chwilowa w chwili $t$. Tw. Lagrange'a mówi, że w pewnej chwili $\xi \in (a,b)$ prędkość chwilowa $s'(\xi)$ jest równa prędkości średniej na całym dystansie.

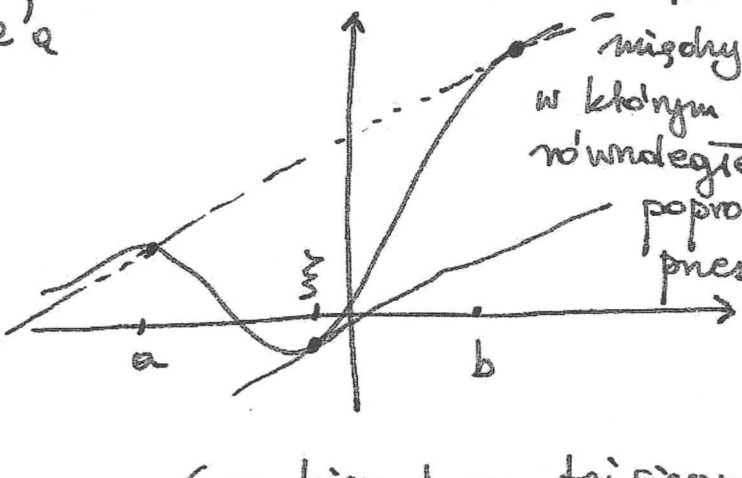
Interpretacja geometryczna tw. Rolle'a i Lagrange'a

Tw. Rolle'a




Jeżeli $f(a) = f(b)$, to między $a$ a $b$ jest co najmniej jeden punkt $\xi$ w którym styczna do wykresu jest pozioma.

Tw. Lagrange'a




Istnieje punkt $\xi$ między $a$ a $b$, w którym styczna jest równoległa do siecznej poprowadzonej przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b)$

(wsp. kierunkowy tej siecznej to $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

## Kluczowy wniosek z tw. Lagrange'a

Twierdzenia o pochodnych funkcji monotonicznych:

Tw. Jeżeli $f$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $(a,b)$, to

a) $f$ jest niemalejąca na $[a,b] \Leftrightarrow \forall_{x\in(a,b)} f'(x)\geq 0$

b) — " — nierosnąca — " — $\Leftrightarrow \forall_{x\in(a,b)} f'(x)\leq 0$.

D-d.

Udowodnimy tylko a), dowód b) jest analogiczny (można też nierosnącą funkcję $f$ zastąpić niemalejącą funkcją $g=-f$ i skorzystać z a)).

$\Leftarrow$

Weźmy dowolne $x,y\in[a,b]$, $x<y$. Mamy wykazać, że $f(x)\leq f(y)$. Wiemy jednak, z tw. Lagrange'a, że

$$\exists_{\xi\in[x,y]} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \overset{\text{z założenia}}{\geq} 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(y)-f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(y)\geq f(x).$$

$\Rightarrow$

Jeżeli $f$ jest niemalejąca, to $\forall_{x,x_0\in[a,b]} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, bo licznik i mianownik mają ten sam znak. Nierówność ta przenosi się na granicę przy $x\to x_0$.

$\Rightarrow \forall_{x_0\in(a,b)} f'(x_0)\geq 0$.

Czy prawdziwe jest
następujące się wzmocnienie tego twierdzenia:
funkcja jest ściśle rosnąca na $[a,b] \Leftrightarrow \forall_{x\in(a,b)} f'(x)>0$?
Nie (a w każdym razie nie w stronę $\Rightarrow$) – funkcja
$f(x)=x^3$ jest ściśle rosnąca na $[-1,1]$, choć
$f'(0)=0$. Można też podać bardziej złożone
przykłady funkcji ściśle rosnących, których pochodne
zerują się nawet w $\infty$-wielu punktach w przedziale
$[a,b]$. Mamy jednak

<u>Tw.</u> Niech $f$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna
na $(a,b)$. Wówczas $f$ jest ściśle rosnąca na $[a,b]$
(odp. ściśle malejąca) wtedy i tylko wtedy, gdy
$f'(x)$ jest $\geq 0$ we wszystkich punktach $x\in(a,b)$
oraz $\forall_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x<y}} \ \exists_{\xi\in(x,y)} \ f'(\xi)>0$.
(odp. $f'(\xi)<0$).

Innymi słowy – punkty, w których $f'>0$, są
gęsto upakowane w $[a,b]$ – między dowolnymi
dwoma punktami tego przedziału znajdę punkt,
w którym pochodna jest dodatnia (odp. ujemna).

Nim udowodnimy to twierdzenie, wyciągnijmy ważny wniosek z poprzedniego: 

Tw. Funkcja ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $(a,b)$ jest na $[a,b]$ stała $\Leftrightarrow f'\equiv 0$ na $(a,b)$.

Dowód: W stronę $\Rightarrow$ już dowiedliśmy, obliczając pochodną funkcji stałej. Pozostaje $\Leftarrow$.

Jeżeli $f'\equiv 0$ na $(a,b)$, to, z poprzedniego twierdzenia, $f$ jest na $[a,b]$ zarówno nierosnąca, jak i niemalejąca (bo $f'\geq 0$ i $f'\leq 0$), a to oznacza już, że $f$ jest stała.

Dowód tw. o ścisłej monotoniczności

$\Rightarrow$

Jeżeli $f$ jest ściśle rosnąca, to z udowodnionego już twierdzenia o funkcjach niemalejących wiemy już, że $f'\geq 0$ na $(a,b)$.

Weźmy teraz dowolne $x,y\in(a,b)$ takie, że $x<y$. Gdyby $\forall_{\xi\in(x,y)}\ f'(\xi)=0$, to $f$ byłaby stała na $[x,y]$ $\lightning$

Tak więc $\exists_{\xi\in(x,y)}\ f'(\xi)>0$.

$\Leftarrow$

Załóżmy, że $f'(\xi)>0\ \forall_{\xi\in(a,b)}$, ale $f$ nie jest na $[a,b]$ ściśle rosnąca.

Z tw. o funkcjach niemalejących wiemy, że $f$ jest na $[a,b]$ niemalejąca; jeżeli nie jest ściśle rosnąca, to istnieją $x,y\in[a,b]$, $x<y$, takie, że $f(x)=f(y)$. Wówczas jednak $f$ jest na $[x,y]$ stała,

a więc $\forall_{\xi \in (x,y)} f'(\xi) = 0$ ↯.

Dla funkcji ściśle malejących dowód jest taki sam, można też, jak zwykle, zamiast malejącej funkcji $f$ rozpatrzyć $g = -f$, która jest wówczas funkcją rosnącą i stosuje się do niej pierwsza część twierdzenia.

# Wnioski z twierdzeń o wartości średniej

## 1. Pochodna a warunek Lipschitza

Twierdzenie: Niech $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $(a,b)$.
Wówczas $f$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L$ na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leq L$.
(W szczególności $f$ lipszycowska na $[a,b] \iff \sup\limits_{(a,b)} |f'| < \infty$).

Dowód

( $f$ spełnia w. L. ze stałą $L \implies \sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leq L$ )

Ustalmy $x \in (a,b)$; mamy $|f'(x)| = \left|\lim\limits_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \underset{\text{ciągłość } |\cdot|}{=}$

$= \lim\limits_{y\to x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|$, ale $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \underset{\text{bo } f \text{ spełnia w.L.}}{\leq} L$,

więc $\forall_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leq L$

$\Downarrow$

$\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leq L$.

( $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leq L \implies f$ spełnia w. L. ze stałą $L$ )

Niech $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x<y$. Z tw. Lagrange'a wiemy, że $\exists_{\xi\in(x,y)} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$, stąd

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\cdot|x-y| \underset{\text{z założenia}}{\leq} L\cdot|x-y| \qquad \square.$$

## 2. Reguła de l'Hôpitala

Guillaume François Antoine de l'Hôpital (de l'Hospital) 1661 - 1704.

Twierdzenie (reguła de l'Hôpitala, pochodzi od J. Bernoulliego)

Załóżmy, że funkcje $f$ i $g$ są różniczkowalne na $(a,b)$, przy czym $\forall_{x\in(a,b)}\ g(x)\neq 0,\ g'(x)\neq 0.$

Załóżmy też, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = G\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, oraz że spełniony jest jeden z dwóch warunków:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$.

Wówczas istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest ona równa $G$.

Uwagi: 1. Dopuszczamy $a=-\infty$ i/lub $b=+\infty$

2. Twierdzenie jest sformułowane dla granic prawostronnych w $a$, ale jest prawdziwe (przy oczywistych zmianach w dowodzie) dla $\lim\limits_{x\to b^-}$ a także, przy ustalonym $c\in(a,b)$, dla $\lim\limits_{x\to c}$ (granica obustronna).

Modyfikacje dowodu są zupełnie oczywiste.

## Dowód reguły de l'Hôpitala

Najprostszy przypadek: $(a,b)$ jest przedziałem skończonym oraz zachodzi warunek a), tj

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Funkcje $f$ i $g$, określone na $(a,b)$, możemy przedłużyć do funkcji ciągłych na $[a,b)$ kładąc
$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ z $\mathfrak{f}$
i analogicznie $g(a)=0$.
Dla dowolnego $x\in(a,b)$ mamy teraz $f$ i $g$ ciągłe na $[a,x]$ i różniczkowalne na $(a,x)$; z tw. Cauchy'ego o wart. średniej istnieje $\xi_x\in(a,x)$ takie, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Jeżeli teraz $x\to a^+$, to $\xi_x \to a^+$, bo $a<\xi_x<x$, zatem $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = G.$ $\square$

Ale w ogólnej sytuacji jest znacznie trudniej.
Dowód proszę porównać z dowodem Lematu Stolza.

Krok 1 Obserwacja: skoro $g'(x)\neq 0$ na $(a,b)$, to $g$ jest na $(a,b)$ różnowartościowa (gdyby dla pewnych $x,y\in(a,b)$ $g(x)=g(y)$, to między $x$ a $y$ byłoby $\xi$ tż $g'(\xi)=0$ – tw. Rolle'a), a więc ściśle monotoniczna. Możemy założyć, że $g$ jest rosnąca ($\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{-f(x)}{-g(x)}$, gdyby $g$ była malejąca, to zastąpilibyśmy $f$ i $g$ przez $-f$ i $-g$).

Mamy wówczas $g'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$.

Krok 2

Wybierzmy liczby $m, \tilde{m}, \tilde{M}, M$ takie, że

$$m < \tilde{m} < G < \tilde{M} < M$$

przy czym jeżeli $G = -\infty$, to nie będziemy mogli wybrać, ale też nie będziemy potrzebować $m$ i $\tilde{m}$, i analogicznie, gdy $G = +\infty$, nie potrzebujemy $M$ i $\tilde{M}$.

Skoro $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$, to istnieje $c \in (a,b)$ t.ż. $\forall_{x \in (a,c)} \; \tilde{m} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \tilde{M}$

Stąd dla $x \in (a,c)$

$$f'(x) - \tilde{m} g'(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \tilde{M} g'(x) - f'(x) > 0$$

a zatem funkcje $f - \tilde{m} g$ oraz $\tilde{M} g - f$ są na $(a,c)$ rosnące.

Krok 3 Jeżeli zachodzi warunek a), to

($\cdot$) skoro $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$, $g$ rosnąca na $(a,c)$, to $g > 0$ na $(a,c)$

($\cdot\cdot$) analogicznie $\lim\limits_{x \to a^+} (f - \tilde{m} g)(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to a^+} (\tilde{M} g - f)(x) = 0$,

Skoro są rosnące, to $f - \tilde{m} g$ i $\tilde{M} g - f$ są dodatnie na $(a,c)$.

$$\forall_{x \in (a,c)} \quad f(x) - \tilde{m} g(x) > 0, \; g(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{m}$$

$$\tilde{M} g(x) - f(x) > 0, \; g(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{M}$$

Liczby $\tilde{M}$ i $\tilde{m}$ są dowolne, byleby spełniały $\tilde{m} < G < \tilde{M}$ (np $\tilde{m} = G - \varepsilon$, $\tilde{M} = G + \varepsilon$ dla dow. $\varepsilon > 0$), więc te nierówności pociągają za sobą $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$.

Krok 4  Przypadek b): $\lim\limits_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$.

Wiemy, że $g$ jest rosnąca, więc $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = -\infty$.

Wiemy też, że funkcje $f - \tilde{m}g$ oraz $\tilde{M}g - f$ są rosnące na $(a,c)$, więc dla $x \in (a,c)$

$$f(x) - \tilde{m}g(x) < f(c) - \tilde{m}g(c)$$
$$\tilde{M}g(x) - f(x) < \tilde{M}g(c) - f(c)$$

Zmniejszając ew. $c$ możemy zapewnić, by $g<0$ na $(a,c)$. Stąd

$$\tilde{M}g(x) + f(c) - \tilde{M}g(c) < f(x) < \tilde{m}g(x) + f(c) - \tilde{m}g(c);$$

dzieląc przez $g(x)$  $(g(x)<0)$

$$\tilde{M} + \underbrace{\frac{f(c)-\tilde{M}g(c)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x\to a^+} 0} > \frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{m} + \underbrace{\frac{f(c)-\tilde{m}g(c)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x\to a^+} 0}$$

Istnieje zatem $d \in (a,c)$ takie, że

$$M > \frac{f(x)}{g(x)} > m \qquad (\text{bo } M > \tilde{M},\ m < \tilde{m})$$

i z dowolności $M$ i $m$  $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$.

(dowód autorstwa A. Birkholca).

**Def.** Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie na $(a,b)$ różniczkowalna. Jeżeli funkcja $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to jej pochodną nazywamy <u>drugą pochodną</u> funkcji $f$ i oznaczamy $f''$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $f_{xx}$ itp.

Analogicznie, $n$-tą pochodną funkcji $f$ nazywamy pochodną $(n-1)$-szej pochodnej funkcji $f$.
<u>Oznaczenie</u>: $f^{(n)}$, $\frac{d^nf}{dx^n}$, $D^nf$ itp.
Jeżeli $f$ ma w $x_0$ skończoną $n$-tą pochodną (a więc i wszystkie poprzednie), to mówimy, że jest w $x_0$ $n$-krotnie różniczkowalna; $f$ jest $n$-krotnie różniczkowalna na zbiorze $A$, gdy jest różniczkowalna ~~na~~ $n$-krotnie we wszystkich $x\in A$.
<u>Uwaga</u>: Na to, by $f$ była $n$-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0$, funkcja i jej pierwsze $(n-1)$ pochodnych muszą być określone ~~i ciągłe~~ na pewnym otoczeniu punktu $x_0$ (żeby można było obliczać kolejne pochodne); co więcej $f, f', \ldots, f^{(n-2)}$ są wówczas ciągłe na tym otoczeniu, a funkcja $f^{(n-1)}$ – w punkcie $x_0$.

Lemat: Niech $r: (-a,a) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $n$-krotnie różniczkowalną w $0$. Wówczas nast. warunki są równoważne:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$

b) $r(0) = r'(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0$.

Dowód: a) $\Rightarrow$ b)

Indukcja. Zauważmy najpierw, że $r, r', \ldots, r^{(n-1)}$ są ciągłe w $0$ (bo są w $0$ różniczkowalne). Stąd

$$r(0) = \lim_{x\to 0} r(x) = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n}\cdot x^n = 0\cdot 0 = 0$$

$$r'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)-r(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}\cdot x^{n-1} = 0\cdot 0 = 0.$$

Niech teraz $1 \le k < n$ i niech $r^{(k)}(0) = 0$.

Zauważmy, że
$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^{k+1}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{r(x)}{x^n}}_{\downarrow x\to 0 \atop 0}\cdot\underbrace{x^{n-k-1}}_{\downarrow \atop \begin{cases}\to 0 & \text{gdy } k+1<n\\ \equiv 1 & \text{gdy } n=k+1\end{cases}} = 0$$

Zastosujmy do tej granicy $k$-krotnie regułę de l'Hôpitala:

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^{k+1}} \overset{H^k}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{r^{(k)}(x)}{(k+1)!\cdot x} = \frac{1}{(k+1)!}\lim_{x\to 0}\frac{r^{(k)}(x)}{x}, \qquad (*)$$

o ile ta ostatnia granica istnieje!

Wiemy jednak, że rzeczywiście $\lim_{x\to 0}\frac{r^{(k)}(x)}{x}$ istnieje, bo

$$\lim_{x\to 0}\frac{r^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{r^{(k)}(x)-r^{(k)}(0)}{x} = r^{(k+1)}(0),$$

a funkcja $r$ jest $(k+1)$-razy różniczkowalna w $0$.

Stąd $r^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{r^{(k)}(x)}{x} \underset{z\,(*)}{=} (k+1)!\cdot 0 = 0$.

b) $\Rightarrow$ a)

Łatwo z reguły de l'Hôpitala. Pochodne $r, r', \dots, r^{(n-1)}$ są ciągłe w 0, więc dla $0 \le k < n$ $\lim_{x\to 0} r^{(k)}(x) = 0$.

Stąd

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{nx^{n-1}} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \dots = \lim_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{n!}\cdot\frac{r^{(n-1)}(x)-r^{(n-1)}(0)}{x} = \frac{1}{n!}r^{(n)}(0) = 0.$$

Uwaga: nie możemy $n$-krotnie zastosować reguły de l'Hôpitala, bo doprowadziłoby to do granicy $\lim_{x\to 0}\frac{r^{(n)}(x)}{1}$, a nie wiemy, czy $r^{(n)}$ istnieje gdziekolwiek poza zerem, a nawet jeżeli istnieje, to czy jest w 0 ciągłe.

Zadanie: Znajdź wielomian $W(x)$ stopnia co najwyżej $n$ taki, że $W(x_0) = \alpha_0$, $W'(x_0) = \alpha_1, \dots, W^{(n)}(x_0) = \alpha_n$ dla pewnych ustalonych $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Zadanie rozwiążemy najpierw dla $x_0 = 0$.

Niech $W(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$.

$W(0) = A_0$, więc $A_0 = \alpha_0$.

$W'(x) = A_1 + 2A_2x + \dots + nA_nx^{n-1}$, więc $W'(0) = A_1$; $A_1 = \alpha_1$

$W''(x) = 2A_2 + 2\cdot 3A_3x + \dots + n(n-1)A_nx^{n-2}$; $W''(0) = 2A_2$; $A_2 = \frac{\alpha_2}{2}$

$\vdots$

$W^{(k)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k A_k + 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)A_{k+1}x + \dots + n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)A_nx^{n-k}$;

$W^{(k)}(0) = k!\,A_k$; $A_k = \frac{\alpha_k}{k!}$

Stąd $W(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k!}x^k$

Dla $x_0 \neq 0$ wystarczy powyższy wielomian przesunąć:

$W(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k!}(x-x_0)^k$ ← Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że $W^{(k)}(x_0) = \alpha_k$.

~~Twierdzenie~~ W szczególności dla dow. wielomianu $W$ mamy

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\deg W} \frac{W^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

**Wniosek z lematu**

Niech $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ będą $n$-krotnie różniczkowalne w $x_0 \in (a,b)$. Wówczas

$$\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \iff \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \\ \vdots \\ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

**Dowód:** Niech $r(h) = f(x_0+h) - g(x_0+h)$.
Funkcja $r$ jest określona na $(a-x_0, b-x_0)$ i jest $n$-krotnie różniczkowalna w $0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-g(x_0+h)}{h^n} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0 \underset{\text{Lemat}}{\iff} \begin{cases} r(0) = 0 \\ r'(0) = 0 \\ \vdots \\ r^{(n)}(0) = 0 \end{cases},$$

ale
$$\begin{aligned} r(0) &= f(x_0) - g(x_0) \\ r'(0) &= f'(x_0) - g'(x_0) \\ &\vdots \\ r^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0) - g^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$
, co daje tezę

**Twierdzenie** (Peano o wzorze Taylora)
Jeżeli funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $n$-krotnie różniczkowalna w $x_0 \in (a,b)$, to możemy $f$ zapisać jako

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x-x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

gdzie reszta $r_n(x)$ ma tę własność, że $\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

**Uwaga:** Powyższy wzór jest DEFINICJĄ reszty $r_n(x)$; teza twierdzenia to to, że $\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Dowód:

Zauważmy, że wielomian

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

to wielomian będący rozwiązaniem Zadania dla $\alpha_0 = f(x_0)$, $\alpha_1 = f'(x_0)$, ..., $\alpha_n = f^{(n)}(x_0)$, a więc wielomian, dla którego

$$T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Stąd, z Wniosku ~~do~~ z Lematu,

$$\cancel{r(x) = f(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \ \square$$

Wielomian $T_n(x)$ nazywamy <u>n-tym wielomianem Taylora</u> funkcji $f$ w $x_0$ (gdy $x_0 = 0$, mówi się czasem o n-tym wielomianie Maclaurina).

Brook Taylor (1685-1731)

Colin Maclaurin (1698-1746)

Giuseppe Peano (1858-1932)

$r_n(x)$ to n-ta reszta Taylora funkcji $f$ w $x_0$.

Zamiast pisać $r_n(x)$, często piszemy $\cancel{o((x-x_0))}$ $\cancel{o(x-x_0)^n}$ $o((x-x_0)^n)$ (o małe od $(x-x_0)^n$) przy $x \to x_0$ (czyli $x - x_0 \to 0$).

Oznaczenie ~~ok~~ „$f(x) = o(g(x))$ dla $x \to a$" należy rozumieć tak, że $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Jest to tzw. symbol Peano.

Wielomian $T_n(x)$ jest wielomianem najlepiej (spośród wielomianów co najwyżej $n$-tego stopnia) przybliżającym funkcję $f$ w pobliżu $x_0$, jest to bowiem jedyny wielomian spełniający warunki

$$(*) \quad W^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{dla } 0 \leq k \leq n.$$

Jak wiemy z Wniosku z Lematu, ~~każdy wielomia~~ jeżeli wielomian $W$ nie spełnia warunków $(*)$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-W(x)}{(x-x_0)^n}$ albo nie istnieje, albo jest różna od zera — w obu przypadkach istnieje $\varepsilon > 0$ i $x$ dowolnie bliskie $x_0$ takie, że błąd przybliżenia $f(x)-W(x)$ jest większy niż $\varepsilon(x-x_0)^n$.

Dla wielomianu $T_n(x)$ ów błąd przybliżenia jest, $\forall_{\varepsilon>0}$ i dla $x$ dost. bliskich $x_0$, mniejszy od $\varepsilon(x-x_0)^n$.

Sprawdźmy, jak wyglądają wielomiany Taylora prostych funkcji:

1. $f(x) = x^3$, szukamy wiel. Taylora $T_n(x)$ w $x_0$

$f(x_0) = x_0^3$ ; $f'(x) = 3x^2$, więc $f'(x_0) = 3x_0^2$,

$f''(x) = 6x$, więc $f''(x_0) = 6x_0$,

$f'''(x) = 6$, więc $f'''(x_0) = 6$,

$\forall_x \; f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \ldots = 0$

Stąd

$$T_0(x) = f(x_0) = x_0^3$$

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = x_0^3 + 3x_0^2(x-x_0) =$$

$$= 3xx_0^2 - 2x_0^3$$