W drugą stronę: szukamy szeregu wolniej rozbieżnego niż pewien szereg $\sum a_n$. (o wyr. dodatnich),

Tw. (Abel, Dini). Jeżeli $\sum a_n$ rozbieżny, $a_n > 0$, to szereg

$$\sum \frac{a_n}{S_n} \qquad S_n = a_1 + \dots + a_n \quad \underline{\text{ciąg } \text{rosnący}}$$

też jest rozbieżny.

Dowód: Oznaczmy $D_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k}$. - ciąg sum częściowych badanego ~~ciągu~~ szeregu. Wykażemy, że (D_n) nie spełnia warunku Cauchy'ego, nie może więc być zbieżny.

$$D_{n+k} - D_n = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geqslant \frac{a_{n+1} + \dots + a_{n+k}}{S_{n+k}} =$$

$$= \frac{S_{n+k} - S_n}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}.$$

ciąg (S_n) dąży do ∞, więc dla dowolnego n

$$\lim_{k\to\infty} S_{n+k} = +\infty \Rightarrow \exists_{k_0} \forall_{k > k_0} \frac{S_n}{S_{n+k}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D_{n+k} - D_n \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}} > \frac{1}{2} \quad \square.$$

Oczywiście $\frac{a_n}{a_n/S_n} = S_n \longrightarrow +\infty$.

Co robić z szeregami o wyrazach niekoniecznie dodatnich?

Mieliśmy na razie 1 poważny przykład: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Uogólniając tamto rozumowanie dostajemy

Kryterium Leibniza

Jeżeli ciąg (a_n) monotonicznie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Dowód: Niech (S_n) oznacza ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Możemy założyć, że (a_n) ~~malejący~~ nierosnący

$$S_{2n+2}-S_{2n}=(-1)^{2n+2}a_{2n+2}+(-1)^{2n+1}a_{2n+1}=a_{2n+2}-a_{2n+1}\leq 0$$

czyli ciąg $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący $\Rightarrow$ dąży do $-\infty$ lub do gr. skończ.

$$S_{2n+1}-S_{2n-1}=(-1)^{2n+1}a_{2n+1}+(-1)^{2n}a_{2n}=a_{2n}-a_{2n+1}\geqslant 0$$

$(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ niemalejący $\Rightarrow$ dąży do gr. sk. lub $+\infty$

$$S_{2n}-S_{2n-1}=a_{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \text{więc}\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}$$

$\Rightarrow (S_n)$ ma granicę skończoną.

Przykład: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ jest zbieżny (choć $\sum\frac{1}{\ln n}$ nie).

Z szeregami o wyr. dowolnych jest pod wieloma względami trudniej, niż z tymi o wyr. nieujemnych. Brak nam podstawowego narzędzia, z którego wywiedliśmy wszystkie dalsze kryt. dla szeregów o wyr. nieujemnych: kryterium porównawczego. Dla szeregów o wyrazach nieujemnych jest ono w pewnym sensie uniwersalne: dla każdego szeregu zbieżnego $\sum a_n$, $\forall_n a_n \geq 0$ istnieje szereg $\sum b_n$ taki, że dddn $b_n \geq a_n$ i szereg $\sum b_n$ jest zbieżny (patrz poprzedni wykład), podobnie dla szeregów rozbieżnych. Dla szeregów o wyrazach dowolnych nie ma, niestety, takiego „panaceum". Jest jednak kilka ważnych narzędzi, pozwalających w wielu przypadkach rozstrzygnąć, czy szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Na początek wygodne narzędzie pomocnicze

<u>Lemat</u> (Abela o sumowaniu przez części)
Dla dowolnych ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $A_n = a_1 + \ldots + a_n$ zachodzi równość

$$\sum_{l=n+1}^{n+k} a_l b_l = \sum_{l=n+1}^{n+k} A_l (b_l - b_{l+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k+1}$$

(proszę zajrzeć w to miejsce za parę miesięcy, gdy wprowadzimy wzór na całkowanie przez części).

<u>Dowód</u>: $a_l b_l = (A_l - A_{l-1}) b_l = A_l(b_l - b_{l+1}) + A_l b_{l+1} - A_{l-1} b_l$

$$\sum_{l=n+1}^{n+k} a_l b_l = \sum_{l=n+1}^{n+k} A_l (b_l - b_{l+1}) + (\cancel{A_{n+1} b_{n+2}} - A_n b_{n+1} + \cancel{A_{n+2} b_{n+3}} - \cancel{A_{n+1} b_{n+2}} + \cancel{A_{n+3} b_{n+4}} - \cancel{A_{n+2} b_{n+3}} + \ldots + A_{n+k} b_{n+k+1} - \cancel{A_{n+k-1} b_{n+k}}) =$$

$$= \sum_{l=n+1}^{n+k} A_l (b_l - b_{l+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k+1}.$$

Ważnym wnioskiem z lematu Abela jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie: ~~Szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny~~ (robocza nazwa: o sumowaniu przez części)

Jeżeli 1° zbieżny jest szereg $\sum A_n (b_n - b_{n+1})$

i 2° ~~istnieje granica~~ zbieżny jest ciąg $(A_n b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$,

to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Jak poprzednio, $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Innymi słowy, na to, by szereg $\sum a_n b_n$ był zbieżny, wystarcza, by spełnione były warunki 1° i 2°.

Zobaczmy, co to twierdzenie da dla zbadanego już przez nas szeregu $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.

Przyjmijmy $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{1}{n}$.

$$A_n = -1+1-1+\ldots+(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ parzyste} \\ -1 & n \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

1° szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1}) \underset{\text{tylko wyr. nieparzyste, bo } A_{2n}=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}(b_{2n-1} - b_{2n}) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)\cdot\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = -\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-2n}}$$

to jest szereg zbieżny (ilorazowe kryt. porówn. z szeregiem $\sum \frac{1}{n^2}$)

2° $$A_n b_{n+1} = \begin{cases} 0 & n \text{ parzyste} \\ -\frac{1}{n+1} & n \text{ nieparzyste} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Twierdzenie to wykorzystamy do sformułowania 2 ważnych kryteriów zbieżności – kryt. Abela i kryt. Dirichleta.

Wcześniej jednak wprowadzimy bardzo ważne pojęcie:

Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest <u>bezwzględnie zbieżny</u>, jeżeli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1} |a_n|$.

(ten ostatni ma wyrazy nieujemne – mamy kryt. porównawcze, i wszystkie pochodne kryteria).

<u>Twierdzenie</u>: Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

<u>Dowód</u>: Badamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o tej własności, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny. Czy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny?

Równoważnie – czy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, jest zbieżny?

A więc – czy spełnia warunek Cauchy'ego?

Czy $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{k\in\mathbb{N}} \; |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$

$$|S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| \overset{?}{<} \varepsilon$$

Wiemy, że ciąg $Z_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ jest zbieżny, a zatem

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{k\in\mathbb{N}} \; |Z_{n+k} - Z_n| < \varepsilon$$

$$|Z_{n+k} - Z_n| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}|$$

ale oczywiście $\underbrace{|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}|}_{= |S_{n+k} - S_n|} \le |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon$

więc z tego, że (Z_n) spełnia w. Cauchy'ego wynika, że i (S_n) go spełnia. □

<u>Uwaga</u>: Istnieją szeregi zbieżne, które nie są bezwzględnie zbieżne – np $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (zbieżny, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie).

Takie szeregi nazywamy <u>warunkowo zbieżnymi</u>

Prostą, ale ważną własność szeregów bezwzględnie zbieżnych ilustruje poniższe twierdzenie:

<u>Twierdzenie</u>: Niech $\sum a_n$ będzie bezwzględnie zbieżny, a ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niech będzie ograniczony. Wówczas szereg $\sum a_n b_n$ też jest bezwzględnie zbieżny (i w szczególności – zbieżny).

Zanim dowiedziemy to tw., zauważmy, że własności tej nie ma żaden szereg warunkowo zbieżny, tj taki, że $\sum a_n$ jest zbieżny, ale $\sum |a_n|$ – rozbieżny (do ∞).
Wystarczy wziąć $b_n = \operatorname{sgn} a_n = \begin{cases} 1 & a_n > 0 \\ 0 & a_n = 0 \\ -1 & a_n < 0 \end{cases}$, wówczas

$\sum a_n b_n = \sum a_n \operatorname{sgn} a_n = \sum |a_n|$ jest rozbieżny.
(np $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ w. zbieżny, $\sum \frac{1}{n} = +\infty$)

<u>Dowód:</u> (b_n) ograniczony, więc $\exists_M \ \forall_n \ |b_n| < M$.

Wówczas $|a_n b_n| \leq |a_n| \cdot M$ i ze zbieżności szeregu $\sum |a_n|$ wynika (kryt. porówn.) zbieżność $\sum |a_n b_n|$, a więc bezwzgl. zbieżność $\sum a_n b_n$, ta zaś, jak już wiemy, pociąga za sobą zbieżność $\sum a_n b_n$ (poprzednie twierdzenie).

Kryteria Abela i Dirichleta

Niels Henrik Abel (1802 – 1829) rozwiązalność r-ń 5go stopnia, teoria grup, teoria szeregów, funkcje eliptyczne.
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)
(w szkole w Kolonii – uczeń Ohma, w Getyndze – nauczyciel Kroneckera, Lipschitza)
teoria liczb, szeregi Fouriera, RRcz, funkcje specjalne, kombinatoryka

Kryt. Abela: Jeżeli

- szereg $\sum a_n$ jest zbieżny

oraz

- ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny i ograniczony

to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny

Dowód: Wykażemy, że jeżeli (a_n) i (b_n) spełniają powyższe warunki, to spełniają też warunki 1° i 2° tw. o sumowaniu przez części.
Mamy wykazać, że:
1° $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny.

bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że (b_n) jest malejący (w p.p. $\sum a_n b_n = -\sum a_n(-b_n)$)
szereg $\sum(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny, gdyż $\sum_{k=1}^{n}(b_n - b_{n+1}) =$
$= b_1 - b_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$ (a ciąg (b_n) jest zbieżny).
Jego wyrazy są nieujemne ⇒ jest to szereg bezwzgl. zbieżny. Równocześnie ciąg $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ jest zbieżny,
a więc ograniczony ⇒ z poprzedniego twierdzenia szereg $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny.

2° ciąg $(A_n b_{n+1})$ jest zbieżny.
owszem, jako iloczyn dwóch ciągów zbieżnych. □.

<u>Kryterium Dirichleta</u> Jeżeli

- ciąg (A_n) sum częściowych szeregu $\sum a_n$ jest ograniczony
- ciąg (b_n) monotonicznie dąży do 0

to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

<u>Dowód</u>: Jak poprzednio, sprawdzimy warunki 1° i 2° twierdzenia o sumowaniu przez części.

1° szereg $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny.

Tak samo jak w dowodzie kryt. Abela szereg $\sum(b_n - b_{n+1})$ jest bezwzględnie zbieżny (jak poprzednio możemy założyć, że ciąg (b_n) jest malejący), więc po pomnożeniu przez ~~ciąg~~ wyrazy ciągu ograniczonego A_n jest dalej bezwzgl. zbieżny, a więc zbieżny.

2° ciąg $(A_n b_{n+1})$ jest zbieżny.

Ciąg (A_n) jest ograniczony, więc $\exists_M \forall_n \ |A_n| < M$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{-Mb_{n+1}} \le A_n b_{n+1} \le \underset{\downarrow \atop 0}{Mb_{n+1}}$$

(jak poprzednio ciąg $(b_n) \searrow 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow b_n \geq 0$).

i z tw. o 3 ciągach $A_n b_{n+1} \to 0$.

Przypomnienie

Kryt. Abela: Jeżeli $\sum a_n$ jest zbieżny, a ciąg (b_n) jest monotoniczny i ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny

Kryt. ~~d'Alemberta~~ Dirichleta: Jeżeli ciąg sum częściowych szeregu $\sum a_n$ jest ograniczony, a ciąg (b_n) monotonicznie dąży do 0, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny

Uwaga 1: Kryterium Abela można wyprowadzić z kryterium Dirichleta: przy zał. kryt. Abela oznaczmy $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, wówczas

$$\sum a_n b_n = \sum a_n (b_n - b) + \sum b a_n =$$
$$= \underbrace{\sum a_n (b_n - b)}_{\substack{\text{tu możemy przyłożyć}\\ \text{kryt. Dirichleta: } \sum a_n \text{ zbieżny, więc}\\ \text{ma sumy częściowe ograniczone, } b_n - b \to 0.}} + \underbrace{b \sum a_n}_{\text{to jest zbieżne z zał.}}$$

Uwaga 2: z kryterium Dirichleta, biorąc $a_n = (-1)^n$, otrzymujemy kryterium Leibniza.

Ważne przykłady zastosowań:

1. Niech (a_n) monotonicznie dąży do 0; dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ możemy rozważać szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$. Jest on dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbieżny.

Dowód: kryt. Dirichleta. Mamy, dla $x \notin \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\sum_{n=1}^{k} \sin nx = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

tu małe oszustwo: co to jest sinus i cosinus? Przykład wybiega w przód.

90

Dowód – pewnie było na ćwiczeniach, ale to prosta indukcja: dla $k=1$

$$\sin x \stackrel{?}{=} \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

wystarczy w liczniku zastosować wzór na różnicę cosinusów: $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (wykazany za jakiś czas).

załóżmy, że dla pewnego k

$$L(k) = \sum_{n=1}^{k} \sin nx = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cancel{\cos\frac{3}{2}x}\cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} = P(k)$$

i przeprowadźmy krok indukcyjny:

wystarczy wykazać, że $L(k+1) - L(k) = P(k+1) - P(k)$
(bo $L(k) = P(k)$)

$$L(k+1) - L(k) = \sin(n+1)x$$

$$P(k+1) - P(k) = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(k+\frac{3}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} =$$

$$= \frac{\cos(k+\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{3}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

w liczniku stosujemy wzór na różnicę cosinusów i wychodzi.

Wniosek z wzoru: szereg $\sum \sin nx$ ma sumy częściowe ograniczone:

$$\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leq \frac{|\cos\frac{1}{2}x| + |\cos(k+\frac{1}{2})x|}{2|\sin\frac{1}{2}x|} \leq$$

$$\leq \frac{2}{2|\sin\frac{1}{2}x|} = \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}x|} \leftarrow \text{nie zależy od } k.$$

i przykładamy do $\sum a_n \sin nx$ kryt. Dirichleta. Możemy to zrobić również dla $x \in \{2l\pi : l \in \mathbb{Z}\}$ – dlaczego?

W podobny sposób pokazuje się, że szereg $\sum a_n \cos nx$, dla (a_n) monotonicznie dążącego do zera i $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, jest zbieżny – używamy wzoru

$$\sum_{n=1}^{k} \cos nx = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Przestawianie wyrazów w szeregach zbieżnych

Przy okazji szeregu anharmonicznego zauważyliśmy, że dla (przynajmniej niektórych) szeregów zawodzi przemienność dodawania: przestawiając wyrazy szeregu mogliśmy istotnie zmienić jego sumę. Teraz zbadamy bliżej to zjawisko:

Niech ~~...~~ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją różnowartościową i „na" (a więc w ciągu $f(1), f(2), \ldots$ każda liczba naturalna wystąpi dokładnie 1 raz). Mówimy wówczas, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ powstał przez przestawienie wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Twierdzenie (o przestawianiu wyrazów w szeregu bezwzględnie zbieżnym). Niech $\sum a_n$ będzie bezwzględnie zbieżny; wówczas ~~...~~ dla dowolnego przestawienia f wyrazów szeregu $\sum a_n$ szereg $\sum a_{f(n)}$ jest zbieżny bezwzględnie i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

92

Dowód

Oznaczmy $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{a_n\}$, $Z_n = \sum_{k=1}^{n} a_{f(n)}$.

$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_n|$ $\widetilde{Z}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_{f(n)}|$

Ciągi (S_n) i $(\widetilde{S}_n)$ są zbieżne, a więc spełniają warunek Cauchy'ego:

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{k\in\mathbb{N}}$

$$\underbrace{|a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}|}_{=|S_{n+k}-S_n|} \le \underbrace{|a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}|}_{=|\widetilde{S}_{n+k}-\widetilde{S}_n|} < \varepsilon$$

Istnieje teraz $m\in\mathbb{N}$ takie, że wśród liczb $f(1), f(2), \ldots, f(m)$ występują wszystkie liczby $1, 2, \ldots, n_0$ (wystarczy więc $m \ge \max\{f^{-1}(l), l=1,\ldots,n_0\}$)

Wówczas dla $n > m$ ($\ge n_0$ - dlaczego?)

$$|S_n - Z_n| = |\underbrace{a_1+\ldots+a_n - a_{f(1)} - \ldots - a_{f(n)}}_{\text{wyrazy } a_1, a_2, \ldots, a_{n_0} \text{ się redukują}}| \le$$

$\le |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots + |a_{n_1}|$, gdzie

$n_1 = \max\{f(k), k=1,\ldots,n\}$ ($\ge n$ - dlaczego?)

$\le \varepsilon$, co dowodzi, że $\lim_{n\to\infty}(S_n - Z_n) = 0$.

Stąd $\underset{\substack{\downarrow\\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k}}{Z_n = S_n} - \underbrace{(S_n - Z_n)}_{\substack{\downarrow\\ 0}}$ ma granicę, i to tę samą, co (S_n).

Zatem dla szeregów bezwzględnie zbieżnych nie ma żadnych problemów z przemiennością. Z drugiej strony mamy twierdzenie:

<u>Twierdzenie</u> (Riemann) Niech szereg $\sum a_n$ będzie warunkowo zbieżny. Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej $x\in\mathbb{R}$ istnieje przestawienie $\underset{\text{bijekcja}}{f_x : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}$ takie, że

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f_x(n)} .$$

Co więcej, istnieją również przestawienia f_∞ i $f_{-\infty}$ tż.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f_\infty(n)} = +\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{f_{-\infty}(n)} = -\infty .$$

<u>Dowód</u>: Wprowadźmy najpierw oznaczenie:

$$(A)_+ = \max(A,0) \qquad (A)_- = -\min(A,0).$$

Mamy oczywiście $A = (A)_+ - (A)_-$

Niech teraz $S_n^+ = \sum_{k=1}^{n} (a_n)_+$ (dodajemy tylko te wyrazy, które są dodatnie, ujemne zastępujemy zerami)

$$S_n^- = \sum_{k=1}^{n} (a_n)_-$$

Mamy ~~teraz~~ $S_n = S_n^+ - S_n^- \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

$|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n| = S_n^+ + S_n^- \longrightarrow +\infty$ (2)

Ciągi (S_n^+) i (S_n^-) są nieujemne i niemalejące – mają granice. Z (2) widzimy, że przynajmniej jeden z nich jest rozbieżny do $+\infty$, a z (1) – że ich różnica ma granicę skończoną $\Rightarrow$ oba muszą dążyć do $+\infty$.

Musimy, dla wygodniejszego zapisu, rozdzielić wyrazy ujemne i dodatnie szeregu $\sum a_n$. Kolejne dodatnie wyrazy oznaczamy $b_1, b_2, \dots$, a ujemne: $-c_1, -c_2, \dots$

Mamy oczywiście $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim S_n^+ = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim S_n^- = +\infty .$$

Wiemy też, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (~~więc~~ bo szereg $\sum a_n$ jest zbieżny);

więc $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ (to są podciągi (a_n)).

Podamy teraz przestawienie f_∞:

- Najpierw dodajemy tyle kolejnych b_n, by suma była > 1. (można, bo $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty$)

potem odejmujemy c_1

potem dodajemy tyle kolejnych b_n, by suma przekroczyła 2

i odejmujemy c_2 itd.

$$\overbrace{b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1}}^{>1} - c_1 + \overbrace{b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2}}^{>2} - c_2 + b_{n_2+1} + \dots + b_{n_3} - c_3 + \dots$$

Co wiemy o ciągu sum częściowych tego szeregu? oznaczmy go przez (Z_n).

~~Dla $n > n_k + k$ ($n_{k+1}+k+1$), wiemy, że dodaliśmy już k „bloków”, więc $Z_n > k$, a jeżeli n wypada równo na koniec (k+1)-go / k-tego bloku, to $Z_n > k - c_k$.~~

Niech m będzie takie, że $c_n < 1$ dla $n > m$.

Wówczas, gdy $k > m$, ~~z tą blok~~ $\cancel{b_{n_k+1} + \dots + b_{n_{k+1}} - c_{k+1}}$ po k „blokach” mam sumę $> k-1$, więc

$Z_n \to \infty$.

95

Analogicznie dostajemy sumę $= -\infty$.
A jak dostać dowolne $x \in \mathbb{R}$?

• dodaję tyle (i tylko tyle) (być może 0) wyrazów dodatnich, by przekroczyć x:

$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} > x, \quad b_1 + \ldots + b_{n_1 - 1} \leq x$

• teraz dodaję tyle i tylko tyle wyrazów ujemnych, by przekroczyć x

$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1}$

i tak dalej. Dlaczego suma jest $= x$?

$Z_n = b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \ldots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \ldots - c_{m_2} + \ldots$

i urywamy w ~~m~~ n-tym miejscu.

n wypada albo w „bloku" wyrazów dodatnich b, albo ujemnych c. Jeżeli $f(n)$ w dodatnich ($a_{f(n)} > 0$),

$$-c_{m_k} + b_{n_k+1} + \ldots + a_{f(n)} \Big| + \ldots + b_{n_{k+1}} - c_{m_{k+1}} - \ldots$$

to $Z_n \in (x - c_{m_k}, x + b_{n_{k+1}})$

a jeżeli w ujemnych, ~~to~~

$$+b_{n_k} - c_{m_{k-1}+1} - \ldots + a_{f(n)} \Big| - \ldots - c_{m_k} + b_{n_{k+1}} + \ldots$$

$$Z_n \in (x - c_{m_k}, x + b_{n_k})$$

tak, czy tak, $c_{m_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, $b_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

i z tw. o 3 ciągach $Z_n \longrightarrow x$

Stała Eulera – Mascheroniego

Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800), Pavia, tw. Mohra-Mascheroniego.

Proste zadanie na tw. Stolza:

(*) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$ (zapewne było na ćwiczeniach)

$$\overset{(S)}{=} \cancel{\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln n - \ln(n-1)}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Wniosek: Dla dużych n mamy

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \approx \ln n$$

ale to bardzo niedokładne przybliżenie – by zachodziła (*), wystarczy, by $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$ ~~dążi~~ $\ln n$ dążyło do ∞ wolniej, niż $\ln n$:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ln(\ln n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Czy więc rzeczywiście $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \approx \ln n$?

By to zbadać, musimy przyjrzeć się nie ilorazowi (*), który daje bardzo zgrubną informację, tylko różnicy $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$.

Zbadajmy ciąg $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

$\boxed{\ln(1+x) < x \text{ dla } x > -1,\ x \neq 0}$

czyli ciąg (a_n) jest malejący. Czy jest ograniczony z dołu?

(97) By to sprawdzić, wprowadzimy inny ciąg

$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$. Oczywiście $b_n < a_n$

$a_n - b_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$b_{n+1} - b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n) =$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

czyli ciąg (b_n) jest rosnący. Mamy zatem

$\forall_{n>2}$

$$0{,}3 < 1 - \ln 2 = b_2 < b_n < a_n < a_2 = \frac{3}{2} - \ln 2 < 0{,}9$$

stąd ciąg (a_n) jest ogr. z ~~góry~~ dołu przez b_2

(b_n) — " — z góry przez a_2

Oba są zatem zbieżne, a z tego, że

$a_n - b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ — do tej samej granicy γ

$$0{,}3 < \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) < 0{,}9.$$

γ w rzeczywistości jest $\approx 0{,}5772156649\ldots$

Pojawia się w teorii liczb, analizie zespolonej, równaniach różniczkowych, kwantowej teorii pola etc etc. Nie wiadomo (!) czy γ jest wymierna, czy nie.

Mnożenie szeregów

Zbadaliśmy, jak wygląda sprawa ~~[illegible]~~ przemienności dodawania w szeregach, czyli sumach nieskończonych. A co z kolejną regułą arytmetyczną – rozdzielnością mnożenia wzgl. dodawania?

Gdy mnożymy 2 skończone sumy:

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \ldots + b_n)$$

w wyniku otrzymujemy sumę $(n+1)^2$ – składników postaci $a_i b_j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. – wszystkich możliwych. Możemy je dodać do siebie w dowolnej kolejności, bo jest ich skończenie wiele. Co jednak, gdy mnożymy przez siebie 2 szeregi nieskończone? ~~Chcielibyśmy mieć~~ Wtedy kolejność dodawania tych iloczynów może mieć wpływ na sumę – a nawet na zbieżność uzyskanego szeregu.

Chcielibyśmy mieć jakieś twierdzenie typu

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n}_{\text{iloczyn sum szeregów.}} = \underbrace{\sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l}_{\text{w jakiejś (jakiejkolwiek?) kolejności}} \quad \text{(suma szeregu)}$$

~~różność sum szeregów.~~

Ale czy to ma sens?

Problemy z przestawianiem wyrazów sugerują, że dla szeregów bezwzględnie zbieżnych powinno coś wyjść. Rzeczywiście

<u>Twierdzenie</u>: Niech szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą bezwzględnie zbieżne, a wyrazami szeregu $\sum c_n$ niech będą wszystkie iloczyny $a_k b_l$, ustawione w dowolnej kolejności.

Wówczas szereg $\sum c_n$ też jest bezwzględnie zbieżny; jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, to $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

<u>Dowód</u>: Najpierw wykażemy, że $\sum c_n$ jest rzeczywiście bezwzględnie zbieżny. Musimy w tym celu wykazać, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum |c_n|$ jest ograniczony z góry (jest niemalejący, więc tylko ogr. z góry nam brakuje). Badamy

$|c_0| + |c_1| + \dots + |c_n|$.

Każdy z wyrazów c_l, $l = 0, 1, 2, \dots, n$, jest postaci $a_i b_j$ dla pewnych i, j.
Niech k będzie największym z indeksów i, a m – z indeksów j pojawiających się w $c_0, \dots, c_n$. Wówczas oczywiście

$$|c_0| + \dots + |c_n| \leq \left(\sum_{p=0}^{k} |a_p|\right)\left(\sum_{r=0}^{m} |b_r|\right) \leq \left(\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|\right).$$

To dowodzi, że szereg $\sum |c_n|$ jest zbieżny, a więc $\sum c_n$ jest bezwzgl. zbieżny. Skoro tak, to jego suma nie zależy od kolejności wyrazów; możemy wybrać ją sobie jakoś tak, by łatwo móc wykazać wzór $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

2 sumowanie „po kwadratach": Oznaczmy $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$
b_0	a_0b_0 (0)	a_1b_0 (3)	a_2b_0 (8)	a_3b_0 (15)	a_4b_0 (24)	
b_1	a_0b_1 (1)	a_1b_1 (2)	a_2b_1 (7)	a_3b_1 (14)	a_4b_1 (23)	
b_2	a_0b_2 (4)	a_1b_2 (5)	a_2b_2 (6)	a_3b_2 (13)	a_4b_2 (22)	
b_3	a_0b_3 (9)	a_1b_3 (10)	a_2b_3 (11)	a_3b_3 (12)	a_4b_3 (21)	
b_4	a_0b_4 (16)	a_1b_4 (17)	a_2b_4 (18)	a_3b_4 (19)	a_4b_4 (20)	
$\vdots$						

Przy takim ponumerowaniu mamy

$$A_0B_0 = c_0$$
$$A_1B_1 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3$$
$$A_2B_2 = c_0 + c_1 + \dots + c_8$$
$$\vdots$$
$$A_nB_n = c_0 + c_1 + \dots + c_{n^2+2n}$$

Stąd podciąg $(C_{n^2+2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu (C_n) sum częściowych szeregu $\sum c_n$ jest iloczynem ciągów zbieżnych (A_n) i (B_n), mamy zatem $\lim_{n\to\infty} C_{n^2+2n} = AB$.
Ale szereg $\sum c_n$, jako bezwzgl. zbieżny, jest zbieżny — a więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_{n^2+2n} = AB$$

□

<u>Uwaga</u>: 1 Szczególnie ważne — ważniejsze od sumowania „po kwadratach" — jest tzw. „sumowanie po przekątnych":