61

Szeregi liczbowe

Terminologia

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych.

Ciąg (S_n): $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$

nazywamy szeregiem o wyrazach $a_1, \ldots, a_n$.

Liczby $S_1, S_2, \ldots$ nazywamy kolejnymi sumami częściowymi szeregu o wyr. $a_1, a_2, \ldots$

Szereg oznaczamy przez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lub $\sum a_n$

tu może być $n=0$, $n=15$ itp.

dla skrótu i gdy nieważne, od czego zaczynamy.

Granicę ciągu $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy (o ile istnieje) sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a szereg, który ma sumę skończoną, nazywamy szeregiem zbieżnym.

Szereg, którego suma jest nieskończona i ~~tak~~ szereg, którego suma nie istnieje nazywamy szeregami rozbieżnymi (pierwszy – rozb. do $\pm$ nieskończoności).

Sumę szeregu $\sum a_n$ oznaczamy tak samo, jak szereg: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Przykłady:

- Niech $q\in(-1,1)$. Szereg $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ jest zbieżny,
bo $S_n = 1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, $q^{n+1}\to 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$ szereg geometryczny.

- Przykład leżący u podstaw teorii

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = ?$$

$= 1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$

$= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+0+\dots = 0$

ale $= 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+\dots = \cancel{0}\,1$

albo: to jest ~~szereg~~ suma ciągu geometrycznego z $q=-1$, więc może $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$?

Po chwili namysłu widać, że $S_n = \begin{cases} 0 & n \text{ parzyste} \\ 1 & n \text{ nieparzyste}\end{cases}$
nie ma granicy, więc $\sum(-1)^n$ jest rozbieżny.

- Przyjrzyjmy się nieskończonej sumie

$$A = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$$

A jest sumą szeregu (o ile ta istnieje) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$; dla tego szeregu

$$S_{2n+2}-S_{2n} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} > 0,$$ zatem ciąg $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$
jest rosnący, (ma granicę, być może $+\infty$)

a $S_{2n+3}-S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3} < 0 \Rightarrow (S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
jest malejący (ma granicę, być może $-\infty$.

(63)

z drugiej strony $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, więc ciągi (S_{2n+1}) i (S_{2n}) mają tę samą granicę (i musi być ona skończona, bo ciąg malejący nie może dążyć do $+\infty$, a rosnący – do $-\infty$).

szereg anharmoniczny

Stąd szereg $\Sigma (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ jest zbieżny i suma

$$A = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{\text{„}\frac{1}{2}\text{"}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}_{\text{„}\frac{1}{12}\text{"}} + \ldots$$ ma sens.

Ustawmy jej składniki w ciut innej kolejności.

$$B = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) \qquad \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$$

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n} = \frac{4n-2n-(2n-1)}{4n(2n-1)} = \frac{1}{4n(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n(2n-1)}\right)$$

czyli $B = \frac{1}{2}A$! A na zdrowy rozum sumy powinny być takie same – dodawanie jest przemienne!

Tak, dodawanie skończenie wielu wyrazów – owszem, ale sumy nieskończone – czyli szeregi – rządzą się innymi prawami.

Twierdzenie (warunek konieczny zbieżności szeregu).

Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Dowód: $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

Uwaga! To nie jest warunek dostateczny, co ilustruje następujący ważny przykład

- szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (do ∞; jeżeli szereg ma wyrazy nieujemne, to ciąg sum częściowych jest niemalejący $\Rightarrow$ ma granicę ~~(s)~~ skończoną – wtedy $\sum a_n$ jest zbieżny, lub $+\infty$ – wtedy $\sum a_n$ jest rozb. do nieskończoności).

Szereg ten nazywany szeregiem harmonicznym.

Dowód rozbieżności: Skoro ciąg S_n na pewno ma granicę, to wystarczy znaleźć jakiś podciąg dążący do $+\infty$. Przyjrzyjmy się S_{2^n}

$$S_{2^0} = S_1 = 1 > \frac{1}{2}$$

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{2^3} = S_8 = \underbrace{1}+\underbrace{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} > \underbrace{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} = 4\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{2^n} = \underbrace{1}+\underbrace{\frac{1}{2}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{\substack{2^k \text{ składników, każdy } > \frac{1}{2^{k+1}} \\ \text{w sumie } > 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^n}}_{> \frac{1}{2}} > \frac{(n+1)}{2}$$

To pokazuje, że ciąg $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony i rośnie do $+\infty$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty.$$

Inny argument: (choć w sumie ten sam powód).

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\quad S_{2n}-S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}}_{n\ \text{wyrazów}} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}}_{n\ \text{razy}} = \frac{1}{2}$$

to oznacza, że ciąg (S_n) nie spełnia warunku Cauchy'ego – a zatem nie może być zbieżny.

- szereg ~~harmoniczny~~ geometryczny jest rozbieżny dla $|q|\geq 1$, bo $q^n \not\to 0$

~~Zastanówmy się raz jeszcze nad dowodem rozbieżności szeregu harmonicznego. Co w nim było istotne? Grupowaliśmy wyrazy od a_{2^n+1} do $a_{2^{n+1}}$ i szacowaliśmy z dołu ich sumę przez $2^n \times$ (najmniejszy z nich) $= 2^n \cdot a_{2^{n+1}}$~~

Jeszcze kilka prostych, ale ważnych faktów:

- Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, zaś $b_n = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$, gdzie k_n jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych (ćw, $\mathbb{N}(0) = \mathbb{N}\cup\{0\}$), $k_1 = 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, do tej samej granicy, co $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k_2-1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{k_2} + a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_3-1})}_{b_2} + \underbrace{(a_{k_3} + \ldots}_{b_3})$$

$a_1 = a_{k_1}$ itd.

Ciąg (R_n) sum częściowych szeregu $\sum b_n$ jest podciągiem ciągu (S_n) sum częściowych szeregu $\sum a_n$, a ten ostatni jest zbieżny, więc każdy podciąg (S_n) jest zbieżny do tej samej granicy.

- jeżeli $\sum a_n$ jest zbieżny, $c \in \mathbb{R}$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, w szczególności $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c a_n)$ jest zbieżny.

- sumą szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ nazywamy szereg $\sum (a_n + b_n)$. Jeżeli szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne, to $\sum(a_n + b_n)$ też i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Dowód: ciąg sum częściowych szeregu $\sum(a_n + b_n)$ to suma ciągów sum częściowych szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$

Uwaga: Suma 2 szeregów rozbieżnych może być zbieżna: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n + \frac{1}{2^n}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, a ten szereg jest zbieżny

Czy suma szeregu zbieżnego i szeregu rozbieżnego może być zbieżna?

Twierdzenie o porównywaniu sum szeregów

Jeżeli szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ mają sumy (np. być może nieskończone) oraz $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n \le b_n$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Jeżeli sumy te są skończone i ~~Z~~ dodatkowo $\exists_{m \in \mathbb{N}}\ a_m < b_m$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

(67)

<u>Dowód</u>: Przyjrzyjmy się szeregowi
$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$. Ma on wyrazy nieujemne, więc ciąg (S_n) sum częściowych jest niemalejący, zatem ma granicę; ~~że~~ $S_1 = b_1 - a_1 \geq 0$,
więc $\forall_n S_n \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{m} a_m \leq \sum_{n=1}^{m} a_n + S_m =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} b_n .$$

Jeżeli zaś $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne i $\exists_m \; a_m < b_m$, to $S_m > 0$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$, zbieżny (jako suma $\sum b_n$ i $\sum(-1)\cdot a_n$), ~~jest zbieżny do granicy~~ ma sumę $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \lim_{m\to\infty} S_m > 0$ (bo ciąg S_n jest niemalejący).

$$\text{stąd } 0 < \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)a_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n + (-1)\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

<u>Wniosek</u>: <u>Kryterium porównawcze</u>

Załóżmy, że dla dost. dużych n (dla $n > n_0$) zachodzą nierówności

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

Wówczas ① jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to również $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

② jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny (do $+\infty$), to i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Dowód: Na początek zmodyfikujmy trochę oba szeregi: $\tilde{a}_n = \begin{cases} a_n & n > n_0 \\ 0 & n \le n_0 \end{cases}$, $\tilde{b}_n = \begin{cases} b_n & n > n_0 \\ 0 & n \le n_0 \end{cases}$

Z twierdzenia o porównywaniu sum szeregów wiemy, że

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \tilde{b}_n$$

i z nierówności jest jasne, że jeżeli $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = +\infty$, to również $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n = +\infty$,

a jeżeli $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n < \infty$, to ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ – ciąg niemalejący – jest ogr. z góry, a więc ma granicę skończoną S.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = S$$

i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} a_n}_{\text{liczba}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + S. < \infty.$

Asymptotyczne kryterium porównawcze

Załóżmy teraz, że dla dost. dużych n $(n > n_0)$ $a_n > 0$, $b_n > 0$ oraz istnieje dodatnia granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g > 0$. Wówczas szereg $\sum a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ szereg $\sum b_n$ jest zbieżny.

Dowód: Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$, to dla dowolnych c, d : $0 < c < g < d$ istnieje $n_1 \ge n_0$ takie, że dla $n > n_1$ mamy $0 < c < \frac{a_n}{b_n} < d$, a więc

$\forall_{n > n_1} \; 0 < c b_n \underset{1}{\le} a_n \underset{2}{\le} d b_n$.

z kryt. porównawczego i 1 : jeżeli $\sum a_n$ zbieżny, to $\sum c b_n$ zbieżny, to $\sum b_n$ zbieżny. Jeżeli $\sum b_n$ rozbieżny,

69

to $\sum cb_n$ też, więc $\sum a_n$ rozbieżny.
Analogicznie z (2) jeżeli $\sum a_n$ rozbieżny, to $\sum db_n$ też $\Rightarrow \sum b_n$ rozbieżny.
Jeżeli $\sum b_n$ zbieżny, to $\sum db_n$ zbieżny $\Rightarrow$ $\sum a_n$ zbieżny.

Wróćmy teraz do dowodu rozbieżności szeregu harmonicznego. Przypomnijmy jego strukturę: łączyliśmy w grupy wyrazy szeregu od $a_{2^{n-1}+1}$ do a_{2^n}. Wyrazów tych było 2^{n-1}, największy z nich to $a_{2^{n-1}+1}$, najmniejszy - a_{2^n}, bo ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest malejący. Stąd

$$2^{n-1} \cdot a_{2^n} \le a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \ldots + a_{2^n} \le 2^{n-1} \cdot a_{2^{n-1}+1}$$

prawa strona ma dość złożony indeks: $2^{n-1}+1$, możemy ją optycznie trochę uprościć, powiększając:

$$\le 2^{n-1} \cdot a_{2^{n-1}}$$

Jedyne, z czego na razie korzystamy, to to, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący. Jeżeli dodatkowo $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_2$ (lub, co wystarczy, dla dost. dużych n), możemy napisać (korzystając z tego, że $\sum a_n$ ma sumę).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n})$$

i z ~~kryt~~ kryt. porównawczego

$$\frac{1}{2} \sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^{n-1} a_{2^n} \le \sum (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}) \le \sum 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

to jest ten sam szereg, z dokł. do 1go wyrazu!

Dowiedliśmy w ten sposób kryterium znanego jako <u>Kryterium</u> (Cauchy'ego) <u>o zagęszczaniu</u>:

Niech ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~maleje monoto~~ będzie ciągiem malejącym, dążącym do 0. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

<u>Przykład:</u> Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny?

Dla $a \le 0$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności: $\left(\frac{1}{n^a}\right) \not\to 0$, więc $\sum \frac{1}{n^a}$ jest rozbieżny.

Gdy $a > 0$, ciąg $\frac{1}{n^a}$ maleje do 0, możemy więc zastosować kryt. o zagęszczaniu:

$$\sum \frac{1}{n^a} < \infty \iff \sum 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^a} < \infty$$

$$\sum 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-a)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-a}\right)^n$$

to jest szereg geometryczny o ilorazie 2^{1-a}, jest więc zbieżny $\iff 2^{1-a} < 1 \iff 1-a < 0 \iff a > 1$

Zatem $\sum \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny $\iff a > 1$.

<u>Przykład</u> Czy zbieżny jest szereg $\sum \frac{1}{n \ln n}$?

z kryt. o zagęszczaniu $\sum \frac{1}{n \ln n} < \infty \iff \sum 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} < \infty$

$$\sum 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \sum \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{n}$$

rozbieżne!

tak więc $\sum \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny.

71

Z kryterium porównawczego możemy wyprowadzić 2 ważne i użyteczne kryteria:

Jean Le Rond d'Alembert 1717 – 1783 wybitny filozof, fizyk i matematyk francuski, encyklopedysta

1. Kryterium ilorazowe d'Alemberta

Załóżmy, że:

- dla $n > n_0$ $a_n > 0$
- istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Wówczas

- jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (w szczególności gdy jest $= \infty$) to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny
- jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny
- jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium nie rozstrzyga.

Nim przejdziemy do dowodu, przeanalizujmy tę trzecią możliwość:

szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

szereg $\sum \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Dowód.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to istnieje $q>1$ takie, że $1<q<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$), wówczas $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} > q$.

$\iff a_{n+1} > q a_n$.

zauważmy teraz, że $\overset{\text{dla } n>n_0}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot a_{n_0+1}$

$$> q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \cdot a_{n_0+1}$$

$$= q^{n-n_0-1} \cdot a_{n_0+1} =$$

$$= q^n \cdot \frac{a_{n_0+1}}{q^{n_0+1}}$$

stąd i z kryt. porównawczego

$\sum a_n > \frac{a_{n_0+1}}{q^{n_0+1}} \sum q^n$, a ten ostatni szereg jest rozbieżny!

Analogicznie, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to $\exists_r$ $0 \le \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1$, wówczas

$$a_n < r^{n-n_0-1} a_{n_0+1} = r^n \left(\frac{a_{n_0+1}}{r^{n_0+1}}\right)$$

i z kryt. porównawczego

$$\sum a_n < \frac{a_{n_0+1}}{r^{n_0+1}} \sum r^n$$

← to jest szereg zbieżny bo $0<r<1$.

Przypomnienie:

$b_n \to 0$, wówczas $\qquad \dfrac{e^{b_n}-1}{b_n} \to 1$

$$\frac{\ln(1+b_n)}{b_n} \to 1.$$

Wykażemy jeszcze jedno użyteczne twierdzenie tego typu:

$s \neq 0$. $s \in \mathbb{R}$ $\qquad \dfrac{(1+b_n)^s - 1}{b_n} \longrightarrow ?$

$$\frac{(1+b_n)^s - 1}{b_n} = \frac{\exp(s\ln(1+b_n)) - 1}{b_n} =$$

$$= \underbrace{\frac{\exp(s\ln(1+b_n)) - 1}{s\ln(1+b_n)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{s\ln(1+b_n)}{b_n}}_{\to 1 \cdot s} \longrightarrow s$$

Powrót do szeregów:

<u>Ilorazowe kryterium porównawcze</u> (szeregi o wyr. <u>dodatnich</u>!)

Jeżeli dla d.d. n ($n > n_0$) zachodzi nierówność

$$\forall_{n > n_0} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

to jeżeli $\sum b_n$ jest zbieżny, to $\sum a_n$ też

$\sum a_n$ rozbieżny, to $\sum b_n$ też.

Dowód: Niemal taki sam, jak dowód kryt. d'Alemberta.

Dla $n > n_0$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot a_{n_0+1} \leq$$
$$\leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}} \cdot a_{n_0+1} = b_n \cdot \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}}$$

pewna stała

+ kryterium porównawcze.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q$, to $\forall_{n>n_0}$ $q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon = \frac{(q+\varepsilon)^{n+1}}{(q+\varepsilon)^n}$

$q-\varepsilon = \frac{(q-\varepsilon)^{n+1}}{(q-\varepsilon)^n}$

$\sum (q+\varepsilon)^{n} < \infty$?

$\sum (q-\varepsilon)^{n} = \infty$?

Kryt. Raabego

Oprócz szeregów potęgowych ~~mamy~~ wiemy też, że zbieżne są szeregi postaci $\sum \frac{1}{n^s}$, $s>1$. (a dla $s \leq 1$ $\sum \frac{1}{n^s} = +\infty$)

Co dostaniemy, porównując dow. szereg z $\frac{1}{n^s}$?

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} \overset{?}{\leq} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{?}{\leq} \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s$$

Pyt: dla jakiego s $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \left(\frac{n}{n+1}\right)^s$

Kłopot: s w wykładniku – trudno się do niego „dobrać". Logarytmy?

$\cancel{\lim \frac{a_{n+1}}{}}$ $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \sim s \underbrace{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{\to 0} \to s \cdot 0$. Kłopot.

~~? Kryterium: jeżeli $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \to s$ i $s>1$, to $\sum a_n$ ~~rozbieżny~~ zbieżny~~

~~Gdy $s<1$, to $\sum a_n$ rozbieżny.~~

~~Dowód: $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \to s$, $s>1$, to $\exists_{1<r<s}$~~

~~$\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} > r$ $\quad n \frac{a_{n+1}}{a_n} > e^r \left(\frac{n+1}{n}\right)^r$~~

$\frac{1}{n+1}$ $\quad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n+1}}$

Trzeba subtelniej.

Kryt. Raabego:

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Jeżeli $\underset{r}{\exists_{>1}}$ dla d.d.n.

- $R_n > r > 1$ to $\sum a_n < \infty$ np $\lim R_n > 1$
- d d d n $R_n \leq 1$ to $\sum a_n = \infty$ np $\lim R_n < 1$

Dowód:

Niech dla $n > n_0$ $R_n > r > 1$.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}$$. Weźmy teraz s: $1 < s < r$.

Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^s - 1}{\frac{1}{n}} = s$, więc dla $n > n_1 > n_0$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \text{, czyli } \left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$

stąd $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^s$, czyli $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}$ i il. kryt. porówn.

Jeżeli dla $n > n_0$ $R_n \leq 1$, to

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$ i il. kryt. porówn.

Jednoznaczność (?) rozwinięcia dziesiętnego

Twierdzenie: Dla każdej liczby dodatniej x istnieją co najwyżej 2 rozwinięcia dziesiętne, przy czym 2 istnieją tylko wtedy, gdy istnieje $k\in\mathbb{N}$ t.ż. $10^k x\in\mathbb{N}$. Z drugiej strony każde x ma rozwinięcie dziesiętne.

Najpierw trzeba ustalić, co rozumiemy pod określeniem „rozwinięcie dziesiętne". Otóż będziemy tak nazywać szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k-n} 10^{k-n}, \text{ gdzie } k\in\mathbb{Z}, \cancel{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}; \ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{k-n}\in\{0,1,2,3,\dots,9\},$$

a dodatkowo $a_k\neq 0$.

Każdy taki szereg jest zbieżny – wynika to od razu z kryt. porównawczego: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k-n}10^{k-n}\leq\sum_{n=0}^{\infty} 9\cdot 10^{k-n} = 10^{k+1}$.

Przykład niejednoznaczności:

$$1=0{,}9999\ldots, \quad 0{,}4=0{,}39999\ldots$$

Dowodząc twierdzenie wykażemy, że jest to, co do zasady, jedyna niejednoznaczność – – jeżeli liczba x ma skończone rozwinięcie dziesiętne, to możemy obniżyć o 1 ostatnią jego cyfrę i dopisać dalej nieskończenie wiele dziewiątek, otrzymując tę samą liczbę.

Dowód twierdzenia (szkic)

(77)

1. Każda liczba ma rozw. dziesiętne. Podamy generujący je algorytm.

- istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $10^k \leq x < 10^{k+1}$ (dowód - zbiór $\{l \in \mathbb{Z} : 10^l \leq x\}$ jest ogr. z góry - przez $\frac{1}{\ln 10} \ln x$; bierzemy k równe jego maksimum)
- istnieje $a_k \in \{1,2,3,\dots,9\}$ tż. $\underset{10^k \leq}{a_k 10^k} \leq x < (a_k+1)10^k \leq 10^{k+1}$
- liczba $\tilde{x} = x - a_k \cdot 10^k$ spełnia
$$0 \leq \tilde{x} = x - a_k \cdot 10^k < 10^k$$
- istnieje $a_{k-1} \in \{0,1,2,\dots,9\}$ tż.
$$0 \leq a_{k-1} \cdot 10^{k-1} \leq \tilde{x} < (a_{k-1}+1) \cdot 10^{k-1}$$
- dalej rozpatruję $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} - a_k \cdot 10^{k-1}$,
$$0 \leq \tilde{\tilde{x}} < 10^{k-1}$$
- istnieje $a_{k-2} \in \{0,1,2,\dots,9\}$ tż $a_{k-2} 10^{k-2} \leq x \leq$ $\leq (a_{k-2}+1) 10^{k-2}$

itd...

2. Załóżmy, że x ma 2 rozwinięcia $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k-n} 10^{k-n}$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_{l-n} 10^{l-n}$

Albo $k = l$, albo $k \neq l$ - w tym przypadku, bez zmniejszenia ogólności, możemy przyjąć $k < l$.

$k<l$: $$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k-n} 10^{k-n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{k-n} = 10^{k+1}$$
$$\leq b_l \cdot 10^{k+1} \leq b_l \cdot 10^l \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_{l-n} \cdot 10^{l-n} = x$$

$\Rightarrow$ wszystkie nierówności w tym ciągu są w rzeczywistości równościami, skąd

$a_{k-n} = 9$, $l = k+1$, $b_{l+1} = b_{l+2} = \dots = 0$

($k=l$) Niech i będzie najmniejszą liczbą taką, że $a_{k-i} < b_{k-i}$ (znów, bez zmiany ogólności, możemy założyć, że nier. jest w tę stronę)

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} a_{k-n}10^{k-n} = \sum_{n=0}^{i} a_{k-n}10^{k-n} + \sum_{n=i+1}^{\infty} a_{k-n}10^{k-n}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{i} a_{k-n}10^{k-n} + \sum_{n=i+1}^{\infty} 9\cdot 10^{k-n} = \sum_{n=0}^{i-1} a_{k-n}10^{k-n} +$$

$$+(a_{k-i}+1)10^{k-i} \leq \sum_{n=0}^{i-1} a_{k-n}10^{k-n} + b_{k-i}10^{k-i}$$

$$* = \sum_{n=0}^{i-1} b_{k-n}10^{k-n} + b_{k-i}10^{k-i} \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_{k-n}10^{k-n} = x$$

$$\Rightarrow a_{k-i-1} = a_{k-i-2} = \ldots = 9, \quad a_{k-i}+1 = b_{k-i}$$

$$b_{k-i-1} = b_{k-i-2} = \ldots = 0.$$

□

Wniosek: Każda liczba dodatnia x ma dokładnie jedno rozwinięcie nieskończone.

Kryterium Kummera

Ernst Kummer ur. 1810 w Sorau (Brandenburgia), studiował w Halle, potem uczył w Sorau i Liegnitz (Legnicy). W Legnicy zainteresował matematyką m. in. Leopolda Kroneckera i F. Joachimsthala. W 1842, dzięki poparciu Jacobiego i Dirichleta, został profesorem w Breslau (...). Gdy po śmierci Gaussa (1855) Dirichlet objął jego katedrę w Getyndze, na opuszczaną przez Dirichleta katedrę mianowano Kummera. Tam wraz z Karlem Weierstrassem stworzył jeden z ~~naj~~ wiodących ośrodków ~~centrów~~ matematycznych na świecie. Był teściem ~~Sch~~ Hermanna Schwarza. Zmarł w 1893 r.

Tw. Szereg $\sum a_n$ jest $(a_n > 0)$ zbieżny $\iff$ istnieje ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb dodatnich i stała $\varrho > 0$ takie, że d.d.d. n

$$(*)\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - \cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n}} b_{n+1} \geq \varrho > 0$$

(np. gdy $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - \cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n}} b_{n+1}\right) > 0$)

D-d

$\Rightarrow$ Wiemy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Niech

$$b_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) / a_n .$$ Wówczas

$$\cancel{b_n + \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{a_n} - \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{a_n} - \frac{\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1$$

$\Leftarrow$ (Stolz)

z $*$ wynika, że $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq \varrho a_{n+1}$ $(**)$
więc ciąg $(a_n b_n)$ jest malejący (i ogr. z dołu), czyli ma granicę skończoną. Stąd szereg
$\sum \frac{1}{\varrho}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ jest zbieżny, a z kryt. porówn. i $(**)$ – również $\sum a_n$ jest zbieżny.

Dowód bardzo prosty, ale zauważmy, że:

- kładąc $b_n = 1$ dla wszystkich n otrzymujemy kryt. Dirichleta:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0 \iff \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \iff \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

- $b_n = n$ – kryt. Raabego (sprawdzić).

Czy istnieje szereg najwolniej rozbieżny?
naj~~szybciej~~wolniej zbieżny?

Innymi słowy – czy istnieje taki szereg $\sum b_n$, że np. ilorazowe kryt. porównawcze będzie rozstrzygało:

$\lim \frac{a_n}{b_n}$ skończona, to $\sum a_n$ zbieżny
$+\infty$ to $\sum a_n$ rozbieżny ?

Odp. NIE

Niech $\sum b_n < \infty$, oznaczmy $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$.
Oczywiście $R_n \to 0$.
Weźmy $a_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$. Wówczas $\sum_{n=2}^{m} a_n = (\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2}+\sqrt{R_2}-\sqrt{R_3}+\dots + \sqrt{R_{m-1}}-\sqrt{R_m}) = \sqrt{R_1}-\sqrt{R_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} \sqrt{R_1}$

z drugiej strony
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n}}{R_{n-1}-R_n} = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n}} \longrightarrow +\infty.$$