41

Jeżeli $m=0$, to $\exp(mx) = \exp(0) = 1 = [\exp(x)]^0$.
Gdy $m<0$, to $\exp(mx) = \frac{1}{\exp(|m|x)} = [\exp(|m|x)]^{-1}$
$= [\exp(x)]^{|m|\cdot(-1)} = [\exp(x)]^m$

stąd ostatecznie

$$\exp\left(\frac{m}{n}x\right) = \sqrt[n]{\exp(mx)} = \sqrt[n]{\exp(x)^m}$$
$$= [\exp(x)]^{\frac{m}{n}}$$

To sugeruje rozwiązanie, przynajmniej dla $a = \exp(1)$:

$$\exp(x) \overset{?}{=} [\exp(1)]^x$$

Definicja: Liczbę $\exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nazywamy liczbą Eulera i oznaczamy e.
Wykazaliśmy na razie, że $\forall q\in\mathbb{Q}\ \exp(q) = e^q$.

O liczbie e wiemy, że
$$2 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} e \text{ , więc } e > 2$$

z zadania

ew dla $n>2$ mamy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow e \geqslant \frac{9}{4}$

Dobrze byłoby oszacować e, a także $\exp(x)$, nieco lepiej.

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby $x<1$ zachodzą nierówności

$$1+x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

przy czym lewa nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (nie tylko $x<1$). Równość w obu nierównościach zachodzi tylko dla $x=0$.

Dowód: najpierw lewa nierówność. Wiemy, że ciąg $(1+\frac{x}{n})^n$ jest, dla $n>n_0$, rosnący, zatem $\forall_{n>2n_0}$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > \left(1+\frac{x}{2n_0}\right)^{2n_0}$, zatem z tw. o szacowaniu

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{2n_0}\right)^{2n_0} = \left(1+\frac{x}{n_0}+\frac{x^2}{4n_0^2}\right)^{n_0} \underset{n.B}{\geq}$$

$$\underset{n.B}{\geq} 1+x+\frac{x^2}{4n_0} > 1+x \quad , \text{ o ile tylko } x \neq 0.$$

$$\left(n_0>|x|, \text{ więc } \frac{x^2+4n_0x}{4n_0^2} > -1\right) \quad \text{dla } x=0 \quad 1+x+\frac{x^2}{4n_0} = 1+x.$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+2n_0)^2>0$$

Mając udowodnioną lewą nierówność możemy ją napisać z $-x$ w miejsce x:

$$\underset{\frac{1}{\exp(x)}}{\underset{\parallel}{\exp(-x)}} \geq 1-x \quad , \text{ równość tylko dla } x=0.$$

Jeżeli tylko prawa strona nierówności jest >0 (a więc gdy $x<1$), możemy nierówność odwrócić stronami

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad , \text{ równość tylko dla } x=0.$$

$\square$

Wiemy teraz, że $2{,}25 = \frac{9}{4} < e$; $e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, więc $e \leq 4$.

W rzeczywistości e jest liczbą niewymierną, co gorsza –

(43)

niewyrażalną przy pomocy skończenie wielu pierwiastków. O tym – niedługo.

$$e \approx 2{,}718281828459045\ldots$$

Euler – do 18 miejsc po przecinku.
1707–1783

Zbadamy staranniej własności funkcji exp.

<u>Twierdzenie</u>: a) funkcja exp jest ~~ści~~ rosnąca

b) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(a_n) = \exp(x)$

c) $\forall_{y>0}\ \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \exp(x) = y$

d) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\forall_n\ a_n \neq 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\exp(a_n)-1}{a_n} = 1$

<u>Dowód</u>: a) Niech $x<y$. Wówczas

$$\exp(y) = \exp(x)\cdot\exp(y-x) \underset{\substack{\uparrow\\ y-x>0}}{>} \exp(x)\,(1+y-x)$$

$$\exp(y-x) > 1+y-x > 1.$$

$$> \exp(x)$$

b) Dla $n>n_0$ mamy $|a_n - x| < \frac{1}{2}$.
Wówczas, dla $n>n_0$

$$\exp(a_n) - \exp(x) = $$
$$= \exp(x)\left[\exp(a_n - x) - 1\right],$$

$$1 + a_n - x \leq \exp(a_n - x) \leq \frac{1}{1-(a_n-x)}$$

$$a_n - x \leq \exp(a_n - x) - 1 \leq \frac{1}{1-(a_n-x)} - 1 = \frac{a_n - x}{1-(a_n-x)}$$

$$\exp(x)\,(a_n - x) \leq \exp(a_n) - \exp(x) \leq \exp(x)\cdot\frac{a_n - x}{1-(a_n-x)}$$

$a_n - x \to 0$

$$\exp(x)\,(a_n-x) \to \exp(x)\cdot 0 = 0 \qquad\qquad \exp(x)\cdot\frac{a_n - x}{1-(a_n-x)} \xrightarrow{n\to\infty} \exp(x)\cdot\frac{0}{1-0} = 0$$

i z twierdzenia o 3 ciągach $\exp(a_n) - \exp(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\iff \exp(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(x)$.

tę własność nazywamy ciągłością funkcji exp.

c) zauważmy najpierw, że $\forall_{y>0} \exists_{n\in\mathbb{N}}$

$$\exp(-n) < y < \exp(n)$$

szkic dowodu:

$\exp(-n) \le \frac{1}{1+n}$, wystarczy znaleźć n takie, by $\frac{1}{1+n} < y$ (zasada Archimedesa, $n > \frac{1}{\frac{1}{y}-1}$) i lewa nierówność jest spełniona dla $n > \frac{1}{\frac{1}{y}-1}$

$\exp(n) \ge 1+n$, więc jeżeli $1+n > y$, to ok. (dla $n > y-1$).

biorąc dowolne $n > \max\left(y-1, \frac{1}{\frac{1}{y}-1}\right)$ mamy ~~także~~ spełnione obie nierówności.

Niech teraz $A = \{z \in \mathbb{R} : \exp(z) < y\}$.

Zbiór A jest niepusty (zawiera $-n$) oraz ograniczony z góry (nie należy doń n, ani – dzięki temu, że exp jest rosnąca, żadna liczba $> n$). Niech $x = \sup A$. Wykażemy nie wprost, że $\exp(x) = y$.

Załóżmy, że $\exp(x) < y$.

~~Jeżeli dla y znaleźliśmy n tż. $e^{-n} < y$, tak samo możemy znaleźć m tż. e^{-m}~~

Wykażemy, że istnieje $\delta > 0$ tż. $\exp(\delta) < \frac{y}{\exp(x)}$.

Dla $\delta < 1$ mamy

$\exp(\delta) < \frac{1}{1-\delta}$, więc jeżeli $\frac{1}{1-\delta} \overset{(*)}{<} \frac{y}{\exp(x)}$, to ok.

$(*) \iff \cancel{\frac{\exp(x)}{y}} \delta < 1 - \frac{\exp(x)}{y}$, ale prawa strona jest >0, więc istnieje δ spełniające te nierówności.

Wówczas

$$\exp(x+\delta) = \exp(x)\cdot\exp(\delta) < \exp(x)\cdot\frac{y}{\exp(x)} = y$$

$\Rightarrow x+\delta \in A$ sprzeczność z tym, że $x = \sup A$. ↯

Analogicznie postępujemy gdy $\exp(x) > y$.

Szukamy $\delta > 0$ takiego, że $\frac{\exp(x)}{y} > \exp(\delta)$.

Wiemy, że $\exp(\delta) \cancel{\geq 1+\delta} \leq \frac{1}{1-\delta}$, więc wystarczy, by $\frac{\exp(x)}{y} > \frac{1}{1-\delta} \iff 1 - \frac{y}{\exp(x)} > \delta$. Liczba $1-\frac{y}{\exp(x)} > 0$, więc znajdziemy δ spełniające

$$0 < \delta < 1 - \frac{y}{\exp(x)}.$$

(np. środek tego odcinka).

wtedy

$$\exp(x-\delta) = \exp(x)\cdot\frac{1}{\exp(\delta)} > \exp(x)\cdot\frac{\cancel{\exp(y)}\, y}{\exp(x)} = y.$$

i $\forall_{z \geq x-\delta}\ \exp(z) \geq \exp(x-\delta) > y$

a więc $x-\delta$ jest ograniczeniem górnym A ↯.

d)

$\cancel{\frac{\exp(a_n)-1}{a_n}}$ Jeżeli $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, to dla $n > n_0$ zachodzi $a_n < \frac{1}{2}$.

Możemy wówczas oszacować $\exp(a_n)$ z obu stron

Dla $n > n_0$ $\quad 1 + a_n \leq \exp(a_n) \leq \frac{1}{1-a_n}$

$$\cancel{a_n \leq \exp(a_n) - 1 \leq \frac{1}{1-a_n} - 1 = \frac{a_n}{1-a_n}}$$

~~o ile tylko~~ $\cancel{a_n \neq 0}$, ~~mamy~~

$$\cancel{\frac{a_n}{|a_n|} \leq \frac{\exp(a_n)-1}{|a_n|} \leq \frac{a_n}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-a_n}}$$

to jest ± 1

cyli

$$0 \le \exp(a_n) - 1 - a_n \le \frac{1}{1-a_n} - 1 - a_n = a_n \cdot \frac{a_n}{1-a_n}$$

$$0 \le |\exp(a_n) - 1 - a_n| \le |a_n| \cdot \left| \frac{a_n}{1-a_n} \right| \quad / : |a_n|$$

$$0 \le \left| \frac{\exp(a_n)-1}{a_n} - 1 \right| \le \left| \frac{a_n}{1-a_n} \right| = \frac{|a_n| \to 0}{|1-a_n| \to 1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

z tw. o 3 ciągach mamy tezę.

Z własności a) i c) wynika, że

$\forall_{y>0} \; \exists!_{x\in\mathbb{R}} \; e^x = \exp(x) = y \Rightarrow$ funkcja exp ma odwrotną.

($\exists!$ – dokł. jedna)

Def: $x = \ln y \Leftrightarrow e^x = y$

Logarytm jest określony $\forall_{y>0}$, jest funkcją rosnącą (dlaczego? – ćwiczenie).

Twierdzenie: Zachodzą nierówności

- $\forall_{x>-1} \quad \frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$. i równość tylko dla $x=0$.

Dowód: $e^y \ge 1+y$, więc kładąc ~~y = ln x~~ $y = \ln(x+1)$ mamy ~~$x = e^{\ln x} \ge 1 + \ln x$~~

$$x+1 = e^{\ln(x+1)} \ge \ln(1+x) + 1$$

co daje $x \ge \ln(1+x)$.

Analogicznie

$$e^y \le \frac{1}{1-y} \quad \text{dla } y<1$$

cyli kładąc $y = \frac{x}{1+x}$ (gdy $x > -1$, $\frac{x}{1+x} < 1$ tryw. ćwiczenie)

(47)

$$\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) \leq \frac{1}{1-\frac{x}{1+x}} = 1+x$$

stąd $\ln\left(\exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) \leq \ln(1+x)$

$$\ln\left(\exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = \frac{x}{1+x}.$$

Definicja $\forall_{x>0}, \forall_{y\in\mathbb{R}}$ definiujemy

$$x^y = \exp(y\cdot \ln x).$$

Łatwo można sprawdzić, że tak zdefiniowana potęga ma wszystkie znane nam własności:

arytmetyczne: $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$ $\quad (xy)^z = x^z y^z$

$x^{-y} = \frac{1}{x^y}$ $\quad \left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{x^z}{y^z}$

$(x^y)^z = x^{yz}$

wzgl. porządku: $x>1, u<v \Rightarrow x^u < x^v$

$0<x<1,\ u<v \Rightarrow x^u > x^v$

$0<u<v,\ x>0 \Rightarrow u^x < v^x$

$0<u<v,\ x<0 \Rightarrow u^x > v^x$

i wzgl. granicy: $\lim_{n\to\infty} u_n = u,\ a>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{u_n} = a^u$.

Symbole nieskończone

Wprowadziliśmy symbole $\pm\infty$ - teraz DEFINIUJEMY na nich działania:

$-(+\infty) = -\infty$ $\quad \forall_{a\in\mathbb{R}}\ \infty \pm a = \infty$

$-(-\infty) = +\infty$ $\quad -\infty \pm a = -\infty$

$+(-\infty) = -\infty$

$+(+\infty) = +\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$ $\quad +\infty - (-\infty) = +\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$ $\quad -\infty - (+\infty) = -\infty$

Dla $a>0$ $\quad a\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot a=+\infty$
$\quad a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=-\infty$

~~Dla~~ $a<0$ $\quad a\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot a=-\infty$
$\quad a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=+\infty$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$
$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

$\forall_{a\in\mathbb{R}} \; \frac{a}{\pm\infty}=0$, $\frac{\pm\infty}{a}=\pm\infty\cdot\frac{1}{a}$ dla $a\neq 0$.

~~$a^{\pm\infty}$~~ Dla $a>1$ $\quad a^{+\infty}=+\infty$, $a^{-\infty}=0$
Dla $a\in(0,1)$ $\quad a^{+\infty}=0$, $a^{-\infty}=+\infty$

$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad -\infty<a<+\infty$, w szczególności $-\infty<+\infty$.

$\ln(+\infty)=+\infty$, $\ln 0=-\infty$.

Na tej liście brak pewnych wyrażeń:

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\cdot(\pm\infty)$, $1^{\pm\infty}$, $\infty-\infty$ itp.

Nazywamy je ~~symbolami~~ wyrażeniami nieoznaczonymi – – dlaczego? za chwilę.

Po co te symbole? By twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy można było stosować również do przypadku, gdy te granice są nieskończone. Nie będziemy dowodzić wszystkich, spróbujmy dla przykładu zająć się tw. o granicy ilorazu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

o ile
- granice po prawej stronie istnieją
- $\lim b_n\neq 0$
- granice (a_n) i (b_n) nie są równocześnie nieskończone. (nie $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

(49) Udowodniliśmy już te twierdzenie w przypadku, gdy obie granice ((a_n) i (b_n)) są skończone, zostaje nam przypadek gdy jedna z nich jest skończona, a druga nie. Załóżmy najpierw, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, $b>0$. Z podanych reguł wynika, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{+\infty}{b} = +\infty$, a więc że $\forall_M \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \frac{a_n}{b_n} > M$.

Czy to prawda? Wiemy, że $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, więc dla $n>n_1$ mamy $b_n < \frac{3}{2} b$.

Podobnie, dla $n>n_2$ mamy $a_n > \frac{3}{2} bM$, bo $a_n \to \infty$.

Zatem dla $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ mamy

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_n}{\frac{3}{2}b} > \frac{\frac{3}{2}bM}{\frac{3}{2}b} = M.$$

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} b_n = b < 0$, to oczekujemy, że

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{+\infty}{b} = -\infty$, ~~iż więc~~ co oznacza, że $\forall_M \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \frac{a_n}{b_n} < M$.

z poprzedniego przypadku wiemy, że $-b_n \to -b > 0$, więc

$$\forall_M \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \frac{a_n}{-b_n} > -M \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < M.$$

Pozostałe przypadki bardzo podobnie, dobre ćwiczenie.

~~Wracamy do funkcji wykładniczej - wykażemy~~

Nim wrócimy do funkcji wykładniczej, wykażemy jeszcze jedno ważne twierdzenie, udowodnione (niezależnie) najpierw przez Bolzano, a kilka lat później przez Augustyna Cauchy (1789-1857)

Def: Mówimy że ciąg $(a_n)_{n\in N}$ jest ciągiem Cauchy'ego (lub - że spełnia warunek Cauchy'ego) jeżeli $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n,m>N}\ |a_n-a_m|<\varepsilon$

Twierdzenie: Ciąg $(a_n)_{n\in N}$ liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód: Mamy do udowodnienia 2 rzeczy:

a) że ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego

b) że ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Zacznijmy od a). Niech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Oznacza to, że $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Wówczas ~~$\forall_{\varepsilon>0}$~~ $\forall_{n,m>n_0}$ mamy

$$|a_n-a_m| = |a_n-a+a-a_m| \le |a_n-a|+|a_m-a| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

b) trudniej. Niech $(a_n)_{n\in N}$ spełnia w. Cauchy'ego.

Zauważmy najpierw, że $(a_n)_{n\in N}$ jest ograniczony:

Dla $\varepsilon=1$ $\exists_{n_0}\ \forall_{n,m>n_0}\ |a_n-a_m|<1$, W szczególności $\forall_{m>n_0}$ $\quad -1<a_m-a_{n_0+1}<1$

$$a_{n_0+1}-1<a_m<a_{n_0+1}+1$$

Kładąc $M = \max\{a_1, \dots, a_{n_0}, a_{n_0+1}+1\}$
i $N = \min\{\text{——}''\text{——}, a_{n_0+1}-1\}$
widzimy, że $\forall_m \ N \leq a_m \leq M$.

Z tw. Bolzano-Weierstrassa z $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ możemy wybrać podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do jakiegoś a, zatem

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{k_0}\ \forall_{k>k_0}\ |a_{n_k}-a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z warunku Cauchy'ego $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_1}\ \forall_{n,m>n_1}$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weźmy $n_0 = \max(k_0, n_1)$.
Dla $n > n_0$ mamy $n_k > n > n_0 \geq k_0$,
więc

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq$$
$$\leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Tu komentarz o zupełności, ciągach w $\mathbb{Q}$
i odróżnianiu ciągów, które „powinny być zbieżne".

Wróćmy teraz do funkcji wykładniczej.

Udowodnimy ważny wzór:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = \exp(x).$$

Zacznijmy od wykazania go dla $x > 0$
(dla $x = 0$ jest oczywisty).

Oznaczmy $S_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Możemy skorzystać z dwumianu Newtona, by wypisać $(1+\frac{x}{n})^n$:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\, x^k}{k!\,(n-k)!\, n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = S_n(x). \qquad (*)$$

Ciąg $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący, a więc na pewno ma granicę. <u>Zadanie</u>: wykaż, że $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry, a więc granica ta jest skończona.

Ustalmy teraz $m \in \mathbb{N}$. Dla $n \geq m$ mamy

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

to jest skończona suma, długości m — a więc nie wydłuża się wraz z n, jak ta linijkę wyżej.

Przejdźmy po obu stronach z n do ~~granicy~~ ∞.

$$\exp(x) \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = S_m(x). \qquad (**)$$

Z $(*)$ i $(**)$ mamy (kładąc w $(*)$ m w miejsce n)

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \leq S_m(x) \leq \exp(x)$$

53

i z tw. o 3 ciągach mamy tezę (dla $x>0$).

Dla $x<0$ skorzystamy z pewnego tricku: Oszacujmy (znów dla $x>0$, żeby nam się nie myliło) $S_n(x)\cdot S_n(-x)-1$

$$0\le \left|S_n(x)\cdot S_n(-x)-1\right| = \left|\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k(-1)^k}{k!}\right)-1\right|$$

$$=\left|\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{x^l(-1)^{l-k}}{k!(l-k)!}+\sum_{l=n+1}^{2n}\sum_{k=l-n}^{n}\frac{x^l(-1)^{l-k}}{k!(l-k)!}-1\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{l=0}^{n}\frac{x^l}{l!}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}\cdot 1^k\cdot(-1)^{l-k}\right)-1}_{0}\right|+$$

$$+\sum_{l=n+1}^{2n}\sum_{k=0}^{l}\frac{x^l}{k!(l-k)!}=\left|\sum_{l=0}^{n}\frac{x^l}{l!}\cdot\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{(1+(-1))^l}-1\right|+$$

0 oprócz $l=0$, wtedy 1

$$+\sum_{l=n+1}^{2n}\frac{x^l}{l!}\cdot\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{l-k}=\sum_{l=n+1}^{2n}\frac{x^l\cdot(1+1)^l}{l!}=\sum_{l=n+1}^{2n}\frac{(2x)^l}{l!}=$$

$$=S_{2n}(2x)-S_n(2x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp(2x)-\exp(2x)=0$$

Mamy zatem

$$1-S_{2n}(2x)+S_n(2x)\le S_n(x)\cdot S_n(-x)\le 1+S_{2n}(2x)-S_n(2x)$$

czyli ($S_n(x)>0$)

$$\frac{1-S_{2n}(2x)+S_n(2x)}{S_n(x)}\le S_n(-x)\le\frac{1+S_{2n}(2x)-S_n(2x)}{S_n(x)}$$

$$\Big\downarrow n\to\infty \qquad\qquad \Big\downarrow n\to\infty$$

$$\frac{1-\exp(2x)+\exp(2x)}{\exp(x)} \qquad\qquad \frac{1+\exp(2x)-\exp(2x)}{\exp(x)}$$

i z tw. o 3 ciągach widzimy, że

$$\lim_{n\to\infty} S_n(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) \quad \square.$$

W następnym twierdzeniu wykażemy wygodny wzór, ułatwiający rozwiązywanie wielu zadań.

Twierdzenie: Niech $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, i niech dodatkowo istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = g$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g.$$

Uwaga: żeby $(1+a_n)^{b_n}$ miało sens, musimy mieć $a_n \geq -1$, ale to jest prawdą d.d.d. n, bo $a_n \to 0$.

Dowód:

Dla d.d. n $1+a_n>0$, mamy wówczas $1+a_n = e^{\ln(1+a_n)}$.
Zatem $(1+a_n)^{b_n} = \left[e^{\ln(1+a_n)}\right]^{b_n} = e^{b_n \ln(1+a_n)}$

Dla dużych n b_n jest dodatnie, więc

$$\frac{a_n}{1+a_n} \leq \ln(1+a_n) \leq a_n$$

$$\frac{a_n b_n}{1+a_n} \leq b_n \ln(1+a_n) \leq a_n b_n \to g \qquad (*)$$

($a_n b_n \to g$, $1+a_n \to 1$)

i z tw. o 3 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ln(1+a_n) = g$.
Stąd (podpunkt b) tw. ze strony 43)

$$\lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln(1+a_n)} = e^g. \quad \square$$

Uwaga: Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe gdy $b_n \to -\infty$, jedyna różnica w dowodzie to to, że dla dużych n mamy $b_n<0$ i nierówności w linijce ozn. $(*)$ są w przeciwną stronę.

(55) Badamy teraz, co zrobić, gdy $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ lub $\to 0$

Twierdzenie (zwane też lematem) Stolza.

Załóżmy, że:

- ~~ciąg b_n~~ $\forall_{n>n_0}\ b_n \neq 0$ oraz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest, dla $n>n_0$, ściśle monotoniczny
- istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ (być może nieskończona).

i spełniony jest jeden z dwóch warunków

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę nieskończoną
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Wówczas ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę

i $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

<u>Dowód</u>: Bez straty ogólności możemy założyć, że $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący (jeżeli maleje, to $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rośnie, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{-a_n}{-b_n}$).

Załóżmy na początek, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g$ jest skończone. Wówczas

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_1(>n_0)}\ \forall_{n>n_1}\ g-\varepsilon \le \frac{a_{n+1}-a_n}{\underbrace{b_{n+1}-b_n}_{>0,\ \text{bo } (b_n) \text{ rosnący}}} \le g+\varepsilon$$

czyli

$$(g-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) \le a_{n+1}-a_n \le (g+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$$

i tak samo $$(g-\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+1}) \le a_{n+2}-a_{n+1} \le (g+\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+1})$$

$$\vdots$$

$$+\quad (g-\varepsilon)(b_{n+k}-b_{n+k-1}) \le a_{n+k}-a_{n+k-1} \le (g+\varepsilon)(b_{n+k}-b_{n+k-1})$$

$$(*)\quad (g-\varepsilon)(b_{n+k}-b_n) \le a_{n+k}-a_n \le (g+\varepsilon)(b_{n+k}-b_n)$$

Jeżeli teraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to przechodzimy w $(*)$ z k do nieskończoności. Dostajemy

$$-b_n(g-\varepsilon) \le -a_n \le -b_n(g+\varepsilon) \qquad (**)$$

Ciąg b_n jest rosnący i dąży do zera $\Rightarrow b_n<0$ (dla $n>n_0$) $\Leftrightarrow -b_n>0$. Dzielimy $(**)$ przez $-b_n$

$$\left(\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_1}\,\forall_{n>n_1}\right)\quad g-\varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le g+\varepsilon \quad\implies\quad \frac{a_n}{b_n}\to g.$$

Jeżeli natomiast $\lim b_n = +\infty$ ((b_n) rośnie, więc nie może być $-\infty$), to dla $k>k_0$ b_{n+k} są dodatnie i dzielimy $(*)$ przez b_{n+k}.

$$\underbrace{\underbrace{\frac{a_n}{b_{n+k}}}_{\to 0}+(g-\varepsilon)\Big(1-\underbrace{\frac{b_n}{b_{n+k}}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\Big)}_{=L_k} \le \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \le \underbrace{(g+\varepsilon)\Big(1-\underbrace{\frac{b_n}{b_{n+k}}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\Big)+\underbrace{\frac{a_n}{b_{n+k}}}_{\to 0}}_{=P_k}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} L_k = g-\varepsilon$, więc dla $k>k_1$ mamy $L_k > g-2\varepsilon$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = g+\varepsilon$, —— " —— $k>k_2$ mamy $P_k < g+2\varepsilon$

i dla $n>n_1$, $k>k_3=\max(k_1,k_2)$ mamy

$$g-2\varepsilon \le \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \le g+2\varepsilon$$

(innymi słowy, dla $m>n_1+k_3$ mamy
$$g-2\varepsilon \le \frac{a_m}{b_m} \le g+2\varepsilon\ )$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = g.$$

(57) Co, jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ jest nieskończona?

Rozpatrzmy przypadek, gdy jest ona $+\infty$
(Dla $-\infty$ dowód identyczny – ćwiczenie)

$$\forall_M \exists_{n_1 (>n_0)} \forall_{n>n_1} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \geq M$$

cyli
$$a_{n+1}-a_n \geq M(b_{n+1}-b_n)$$
$$a_{n+2}-a_{n+1} \geq M(b_{n+2}-b_{n+1})$$
$$\vdots$$
$$+ \quad a_{n+k}-a_{n+k-1} \geq M(b_{n+k}-b_{n+k-1})$$

$$a_{n+k}-a_n \geq M(b_{n+k}-b_n) \quad (*)$$

i jak poprzednio – jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

~~tu dzielimy obie strony przez b_{n+k} i $k\to\infty$~~

to przechodzimy w $(*)$ z k do ∞ i dostajemy

mamy $-a_n \geq -Mb_n$, ale $b_n < 0$,
dzielimy przez $-b_n$

$$\forall_M \exists_{n_1} \forall_{n>n_1} \frac{a_n}{b_n} \geq M \iff \frac{a_n}{b_n} \to \infty$$

Jeżeli zaś $b_n \to \infty$, ~~bo~~ to dzielimy obie strony przez b_{n+k} (dla $\underset{n>n_1}{k>k_0}$ $b_{n+k}>0$).

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_{n+k}} \geq M\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right)$$

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq M\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right) + \frac{a_n}{b_{n+k}} = P_k$$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = M$, więc dla $k>k_1 (>k_0)$

$$P_k > M-1.$$

czyli dla $n>n_1$, $k>k_1$ (czyli $m > n_1+k_1$)

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} > M-1 \iff \lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{b_m} = +\infty. \qquad \square$$

~~Przykład:~~ ~~$\frac{\ln n}{k}$~~

~~Z własności exp mamy od razu, że $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$.~~

~~Przydał nam się jeszcze lemat:~~

~~Jeżeli a_n~~

Lemat: Jeżeli $a_n \to g$, $a_n>0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln g$ (z umową, że $\ln(0) = -\infty$).

Dowód: (dla $g>0$, dla $g=0$ — prościutkie ćwiczenie).

~~$\frac{a_n-1}{g\,a_n} \le \ln a_n = \ln(1+(a_n-1)) \le a_n-1$~~

Załóżmy najpierw, że $g=1$. Wówczas

$$\frac{a_n-1}{a_n} \le \ln a_n = \ln(1+(a_n-1)) \le a_n-1 \to 0$$

0 i z 3 ciągów $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln 1 = 0$.

59

Jeżeli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} g > 0$, to $\frac{a_n}{g} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$$\ln\left(\frac{a_n}{g}\right) = \ln a_n - \ln g$$

cyli $\ln a_n = \ln g + \underbrace{\ln \frac{a_n}{g}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln g$ $\square$.

<u>Przykład</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = ? \qquad \begin{array}{l} a_n = \ln n \\ b_n = n \end{array}$$ spełniają warunki tw. Stolza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1) - n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\to 1}}{1} = \frac{\ln 1}{1} = 0.$$

<u>Przykład</u>

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ?$$

$$\sqrt[n]{n} = \left(e^{\ln n}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

Niewymierność e

Przyjrzyjmy się raz jeszcze liczbie e.

Wiemy już, że $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$

Oznaczmy $e_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

i oszacujmy błąd przybliżenia e przez e_n.

Ciąg (e_n) jest oczywiście rosnący, więc $e-e_n>0$.

$$0 < e-e_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!} - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!} = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=n+1}^{k}\frac{1}{j!} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots+\frac{1}{(n+2)\cdot\ldots\cdot k}\right] \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)^{k-(n+1)}}\right]}_{\text{suma ciągu geometr. o ilorazie } \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1-\frac{1}{(n+1)^{k-n}}}{\underbrace{1-\frac{1}{n+1}}_{=\frac{n}{n+1}}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{(n+1)}!}\cdot\frac{\cancel{n+1}}{n}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1-\underbrace{\frac{1}{(n+1)^{k-n}}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{n\cdot n!}$$

$n!$

Dostajemy stąd, że $e_n < e < e_n + \frac{1}{n\cdot n!}$ $/\cdot n!$

$$n!e_n < n!e < n!e_n + \frac{1}{n}$$

Załóżmy teraz, że e daje się przedstawić jako ułamek $\frac{p}{q}$ i wybierzmy $n>q$. Wówczas $n!e \in \mathbb{Z}$.

Równocześnie $n!e_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!} \in \mathbb{Z}$, skąd $n!(e-e_n)\in\mathbb{Z}$

$$0 < \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{n!(e-e_n)}} < \frac{1}{n} \quad ⚡.$$