Analiza matematyczna 1.1 2009/10

- Sprawy organizacyjne:

ocena: 2 kolokwia po 35 pkt
prace domowe 15 pkt
ćwiczenia 15 pkt

razem 100 pkt, 50 gwarantuje zaliczenie.

Wykład 1

Jak powstaje teoria matematyczna? Wprowadzamy pewne podstawowe pojęcia (bez definiowania) i zakładamy (bez dowodu) pewne związki między nimi - pewniki, czyli aksjomaty. Podamy teraz pojęcia i pewniki teorii liczb rzeczywistych - podstawę analizy matematycznej

- zbiór $\mathbb{R}$ (nieznanych nam na razie elementów) - liczb rzeczywistych
- w zbiorze $\mathbb{R}$ określone jest działanie $+$, które każdej parze x, y elementów $\mathbb{R}$ przypisuje dokładnie jedną liczbę z $\mathbb{R}$, oznaczaną $x+y$. Działanie to nazywamy dodawaniem

AKSJOMATY DODAWANIA

① Dla dowolnych $x,y \in \mathbb{R}$ $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ $x+y=y+x$ (przemienność dodawania)

② $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ $x+(y+z)=(x+y)+z$ (łączność dodawania)

③ w $\mathbb{R}$ istnieje liczba zero (ozn. 0) o tej własności, że $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ $x+0=x$

④ $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ istnieje w $\mathbb{R}$ liczba przeciwna do x, oznaczana $-x$, o własności $x+(-x)=0$

Matematycy dowolny zbiór spełniający aksjomaty (1)-(4) nazywają grupą przemienną

$\mathbb{R}$ z działaniem + jest grupą przemienną

W zbiorze $\mathbb{R}$ określone jest też drugie działanie, zwane mnożeniem, które każdej parze liczb x, y przypisuje dokładnie jedną liczbę $x \cdot y$. Działanie to ma następujące własności:

AKSJOMATY MNOŻENIA

(5) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \ x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność mnożenia)

(6) $\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}} \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (łączność mnożenia)

(7) w $\mathbb{R}$ istnieje liczba 1 o tej własności, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} \ x \cdot 1 = x$, przy czym 1 jest różne od 0.

(8) Dla dowolnej, różnej od 0 liczby x istnieje w $\mathbb{R}$ liczba odwrotna do x, oznaczana x^{-1}, o własności $x \cdot x^{-1} = 1$

Mnożenie i dodawanie są ze sobą związane AKSJOMATEM ROZDZIELNOŚCI MNOŻENIA WZGLĘDEM DODAWANIA

(9) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

W zbiorze $\mathbb{R}$ jest zadana relacja $<$ (porządek), przypisująca każdej parze x, y wartość logiczną (prawda lub fałsz). Piszemy $x<y$ (x jest mniejsze od y) gdy parze (x,y) przypisana jest wartość prawda.

(Aksjomaty (5)-(8) mówią, że $\mathbb{R}$ bez 0, z działaniem mnożenia, jest grupą przemienną, a (1)-(9) - że jest ciałem)

AKSJOMATY PORZĄDKU

(10) Dla dowolnych różnych liczb x, y zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości: albo $x<y$, albo $y<x$

Czasem ten aksjomat zapisuje się inaczej, w postaci tzw. zasady trichotomii: $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości: $x=y$, $x<y$, $y<x$.

(11) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$ i $y<z$, to $x<z$ (przechodniość ~~nierówności~~ relacji $<$)

i dwa aksjomaty wiążące $<$ z działaniami:

(12) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$, to $x+z<y+z$

(13) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ jeżeli $x>0$ i $y>0$, to $x\cdot y>0$

to oczywiście oznacza $0<x$

Uwaga: $x\leq y \Leftrightarrow x=y$ lub $x<y$

Został nam jeszcze jeden, bardzo ważny aksjomat, zwany aksjomatem ciągłości lub aks. kresu.

Musimy zacząć od definicji:

Podzbiór $A\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry (przez liczbę M), jeżeli dla dowolnego $x\in A$ zachodzi $x\leq M$. M jest ogr. górnym zbioru A

Przykład: zbiór liczb rzeczywistych z przedziału $[0,1]$ jest ograniczony z góry (przez 1, 15, 210 itp.)

Def. kresu górnego

Mówimy, że ~~zbiór~~ liczba a jest kresem górnym zbioru $A\subset\mathbb{R}$, jeżeli

(•) a jest ograniczeniem górnym zbioru A

(••) jeżeli $b<a$, to b nie jest ogr. górnym A a więc istnieje $x\in A$ taki, że $b<x$.

inaczej: kres górny A to najmniejsze ograniczenie górne zbioru A. Oznaczamy go $\sup A$

AKSJOMAT CIĄGŁOŚCI

(14) Każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma kres górny.

Umowa: Jeżeli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, piszemy $\sup A = +\infty$

Analogicznie do kresu górnego definiujemy kres dolny niepustego zbioru A ograniczonego z dołu, jako największe z ograniczeń dolnych. Oznaczamy go $\inf A$; jeżeli A nieogr. z dołu, to $\inf A = -\infty$.

Proste ćwiczenie: oznaczmy $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$

A niepusty: Wówczas $\sup(-A) = -\inf A$; jeżeli więc zbiór A jest ogr. z dołu, to $-A$ - z góry, istnieje na mocy aksjomatu ciągłości $\sup(-A)$, a więc istnieje $\inf A$.

Przy pomocy aksjomatów możemy dowodzić twierdzenia, np.

- jeżeli dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ $a + b \overset{(*)}{=} a$, to $b = 0$.

DOWÓD: Z (4) istnieje liczba $-a$, o tej własności, że $a + (-a) = 0$. Zatem

$$0 = a + (-a) \overset{(*)}{=} (a+b) + (-a) \overset{①}{=} (b+a) + (-a) \overset{②}{=} b + (a + (-a)) =$$
$$\overset{④}{=} b + 0 \overset{③}{=} b$$, zatem $0 = b$.

• dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba $x \in \mathbb{R}$ t.ż. $a + x = b$

Dowód: Zacznijmy od udowodnienia, że taka liczba w ogóle istnieje. Wykażę, że $x \overset{(*)}{=} b + (-a)$ spełnia warunek $a + x = b$

$$a + x \overset{(*)}{=} a + (b + (-a)) \overset{①}{=} a + ((-a) + b) \overset{②}{=} (a + (-a)) + b = \overset{④}{=} 0 + b \overset{③}{=} b.$$

Załóżmy teraz, że są 2 takie liczby, x oraz y

$$a + x = b \quad , \quad a + y = b.$$

Wykażemy, że $x = y$.

mamy $a + x = b = a + y$, więc

$$b + (-a) = (a + x) + (-a) = (a + y) + (-a) \overset{①}{=} (y + a) + (-a) = y + \underset{\substack{\parallel \\ y + 0 = y.}}{(a + (-a))}$$

$$\overset{①}{=} (x + a) + (-a) = x + (a + (-a)) = x + 0 = x$$

a zatem $x = y$.

Analogicznie możemy dowieść wszystkie znane reguły arytmetyczne; np.

•) $-(-a) = a$;

•) $a \cdot b = a$ oraz $a \neq 0$, to $b = 1$;

•) $a \cdot y = a \cdot z$, to ~~albo~~ $a = 0$ lub $y = z$;

•) dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 0 = 0$

•) $\forall_a$ jeśli $a \neq 0$, to $a^{-1} \neq 0$

•) $\forall_{a,b}$ jeśli $a \neq 0$, to istnieje dokładnie jedna liczba x t.ż. $a \cdot x = b$

itd.

•) $\forall_a (-1) \cdot a = -a$

•) $\forall_a$ jeżeli $a > 0$, to $0 > -a$

•) $1 > 0$ itd.

•) $\forall_{a \in \mathbb{R}}$ $a^2 \geqslant 0$, jeżeli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$.

Odtąd będę zakładał, że wszystkie te, znane Państwu od lat zasady arytmetyczne są prawdziwe; niektóre z nich dowiodą Państwo na ćwiczeniach, na wykładzie trochę szkoda na to czasu.

<u>Def</u>: Wartość bezwzględna (moduł) liczby x, oznaczana $|x|$, zdefiniowana jest jako

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \quad (x \leq 0 \text{ też ok})$$

<u>Twierdzenie</u> (własności wart. bezwzględnej)

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

1. $|x| = |-x|$
2. $|x| \geq x$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$
5. $||x|-|y|| \geq |x-y|$

(4), (5) – nierówności trójkąta.

Dowody podpunktów 1 - 3 wymagają sprawdzenia rozpatrzenia oddzielnie przypadków $x>0$, $x=0$, $x<0$ (a w 3: x lub $y=0$; $x>0$, $y>0$; $x>0$ $y<0$; $x<0$ $y>0$; $x<0$ $y<0$), ale są zupełnie trywialne.

Dowód 4
- Jeżeli $x \geq 0, y \geq 0$, to $x+y \geq 0$, więc $L = |x+y| = x+y = |x|+|y| = P$
- Jeżeli $x \leq 0$, $y \leq 0$, to $x+y \leq 0$

$$L = |x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) = |x|+|y| = P$$

- Jeżeli $x>0$, $y<0$, to

$$L = |x+y| = \begin{cases} x+y & \text{gdy } x+y \geq 0 \\ -x-y & \text{gdy } x+y < 0 \end{cases} ; \quad P = x-y$$

wykażemy, że $P = x-y$ jest $\geq$ zarówno od $x+y$, jak i od $-(x+y)$:

~~x+y>~~ $y<0<-y$, więc $x+y < x+0 < x-y$,

$-x<0<x$, więc $-x-y = -(x+y)$

$\wedge$

$-y < x-y$

to oznacza, że dla $x>0$, $y<0$ mamy zawsze $P>L$.

- przypadek $x<0$, $y>0$ jest analogiczny do poprzedniego.

Dowód (5): Zauważmy, że

$$(*) \quad |x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$$

$$(**) \quad |y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x|,$$

z $(*)$ $|x-y| \geq |x| - |y|$

z $(**)$ $|x-y| \geq |y| - |x|$

a $||x|-|y||$ jest równy jednej z tych dwóch liczb!

stąd $|x-y| \geq ||x|-|y||$.

Uwaga: Powyżej posługiwałem się niezdefiniowaną wcześniej operacją: odejmowaniem. Mamy

$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}$ $\quad a-b \stackrel{def}{=} a+(-b)$

analogicznie $\forall_{a,b\in\mathbb{R},\, b\neq 0}$ $\quad a/b \stackrel{def}{=} a\cdot b^{-1}$

$\equiv$

$a:b$

Def: $\mathcal{N}(k)$ to najmniejszy zbiór spełniający warunki:

- $k \in \mathcal{N}(k)$
- jeżeli $n \in \mathcal{N}(k)$, to $n+1 \in \mathcal{N}(k)$

Zbiór $\mathcal{N}(1)$ nazywamy zbiorem liczb naturalnych i oznaczamy $\mathbb{N}$.

(Oczywiście $\mathcal{N}(k)$ składa się z wszystkich liczb postaci $\{k, k+1, k+2, \dots\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$).

Uwaga: to, czy $\mathbb{N} = \mathcal{N}(1)$, czy $\mathbb{N} = \mathcal{N}(0)$ (a więc czy 0 jest liczbą naturalną) jest sprawą umowy; przyjęcie, że 0 jest l.n. ułatwia życie (formułowanie twierdzeń) jednym matematykom (teoria mnogości), utrudniając innym (teoria liczb). Ja wolę przyjmować, że $0 \notin \mathbb{N}$.

Twierdzenie: Jeżeli $n \in \mathcal{N}(k)$, to $n \geq k$.

Dowód: Oznaczmy $A = \{n \in \mathcal{N}(k) : n \geq k\}$. Oczywiście $A \subset \mathcal{N}(k)$ (z definicji).

Zauważmy, że:

- $k \in A$ (oczywiste)
- jeżeli $n \in A$, to $n+1 > n \geq k$, więc i $n+1$ należy do A. ($n \in A \Rightarrow n+1 \in A$)

Zbiór $\mathcal{N}(k)$ jest najmniejszym zbiorem spełniającym oba powyższe warunki, więc jeżeli jego podzbiór A je spełnia, to w rzeczywistości musi zachodzić $A = \mathcal{N}(k)$. Stąd każdy $n \in \mathcal{N}(k)$ spełnia warunek na bycie w A, czyli $n \geq k$.

~~Twierdzenie: Jeżeli $n \in \mathcal{N}(k)$, $m > n$, $m \in \mathcal{N}(k)$, to $m \geq n+1$.~~

Twierdzenie: Jeżeli $n \in \mathcal{N}(k)$ i $n > k$, to $n-1 \in \mathcal{N}(k)$.

Niech $A = \{k\} \cup \{n \in \mathcal{N}(k) : n > k \Rightarrow n-1 \in \mathcal{N}(k)\}$.

- $k \in A$
- $A \subset \mathcal{N}(k)$
- Niech $n \in A$. Wykażemy, że $n+1 \in A$.

Jeżeli $n = k$, to $n+1 = k+1$; liczba $k+1$ należy do zbioru $\{n \in \mathcal{N}(k) : n > k \Rightarrow n-1 \in \mathcal{N}(k)\}$, bo $k+1 > k$, $k+1-1 = k \in \mathcal{N}(k)$, więc $k+1 \in A$

Jeżeli $n \neq k$, $n \in A$, to $n+1$ spełnia warunki
$n+1 \in \mathcal{N}(k)$, $n+1 > k$,
$n+1-1 = n \in \mathcal{N}(k)$,
więc $n+1 \in A$.

Znów z minimalności $\mathcal{N}(k)$ mamy $A = \mathcal{N}(k)$, a zbiór A składa się z k oraz z tych n, które spełniają tezę twierdzenia.

Wniosek: Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, to $n \geq k$

Twierdzenie: Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, $m > n$ oraz $m \in \mathcal{N}(k)$, to $m \geq n+1$.

Niech A składa się z tych $n \in \mathcal{N}(k)$, dla których spełniona jest teza twierdzenia

- $k \in A$, jeżeli bowiem $m > k$, $m \in \mathcal{N}(k)$, to z poprzedniego twierdzenia $m-1 \in \mathcal{N}(k)$, czyli $m-1 \geq k$ (z wniosku). $\Leftrightarrow$ $m \geq k+1$.

• załóżmy teraz, że $n \in A$. Czy $n+1 \in A$?
Niech $m > n+1$, $m \in \mathcal{N}(k)$. Oczywiście $m-1 \in \mathcal{N}(k)$, bo $m > n+1 > n \geq k$.
Mamy też $m-1 > n$, więc z tego, że $n \in A$ wynika, że $m-1 \geq n+1 \Rightarrow m \geq (n+1)+1$.
To oznacza, że $n+1 \in A$.

Jak poprzednio, z minimalności $\mathcal{N}(k)$ mamy, że $A = \mathcal{N}(k)$, więc teza zachodzi dla wszystkich $n \in \mathcal{N}(k)$.

Wniosek: Jeżeli $n \in \mathcal{N}(k)$, to między n a $n+1$ nie ma innych elementów $\mathcal{N}(k)$. (odstępy między liczbami są ≥ 1).

Twierdzenie: Każdy niepusty podzbiór $\mathcal{N}(k)$ ma element najmniejszy (zasada minimum) ($A \subset \mathcal{N}(k)$, $A \neq \emptyset \Rightarrow \inf A \in A$).

Dowód (nie wprost) Załóżmy, że niepusty $A \subset \mathcal{N}(k)$ nie ma elementu najmniejszego.
~~Oznaczmy~~ ~~$B = \{$~~
Gdyby $k \in A$, to k byłoby elementem najmniejszym A, bo $\forall_{n \in \mathcal{N}(k)}\ k \leq n$. ($k = \inf \mathcal{N}(k)$). Zatem $k \notin A$. Oznaczmy $B = \{n \in \mathcal{N}(k) : \forall_{m \in A}\ n < m\}$
Wykazaliśmy, że $k \notin A$, więc $k \in B$.

Jeżeli teraz $n \in A$, czyli $\forall_{m \in A}\ n < m$, to
$\forall_{m \in A}\ n+1 \leq m$
(bo w $\mathcal{N}(k)$ odstępy między liczbami są co najmniej jeden). Gdyby teraz $n+1 \in A$, to $n+1$ byłoby elementem najmniejszym w A, więc $n+1 \notin A$.

oznacza to, że ~~···~~ $\forall_{m\in A}\ n+1 < m$,
czyli że $n+1 \in B$.
Zbiór B spełnia zatem warunki $k\in B$
$B \subset \mathcal{N}(k)$, $n\in B \Rightarrow n+1 \in B$
co oznacza, że $B = \mathcal{N}(k)$ i na A
nie ma już miejsca: $A = \emptyset$. ↯ ← sprzeczność kończąca dowód.

Twierdzenie: Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $\mathcal{N}(k)$ ma element największy. (zasada maksimum)

Dowód (nie wprost): załóżmy, że $A \subset \mathcal{N}(k)$, $A \neq \emptyset$, A jest ograniczony z góry, ale $\sup A \notin A$ (w A nie ma elementu największego).
Liczba $\sup A - 1$ jest mniejsza niż $\sup A$, więc istnieje $n \in \mathcal{N}(k)$ t.ż. $n > \sup A - 1$.
Mamy $n+1 > \sup A$, czyli $\forall_{m\in A}\ m < n+1$, ale pomiędzy n a $n+1$ nie ma żadnych elementów $\mathcal{N}(k)$ (a więc i A) $\Rightarrow \forall_{m\in A}\ m \leq n$.
Oznacza to, że $n\in A$ jest ograniczeniem górnym A $\Rightarrow$ jest elementem największym ↯

Wniosek (zasada Archimedesa):
$\sup \mathcal{N}(k) = \infty$, w szczególności $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ ~~$\exists_{n\in\mathcal{N}(k)}$~~ $\exists_{n\in\mathbb{N}}$ tż $n > x$.

Dowód: Zbiór $\mathcal{N}(k)$ nie ma elementu największego (oczywiste), nie może więc być ograniczony z góry.

Własności arytmetyczne zbioru liczb naturalnych (nie zależą od tego, czy $0 \in \mathbb{N}$, czy nie).

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Wówczas
- $m+n \in \mathbb{N}$
- $m \cdot n \in \mathbb{N}$
- jeżeli $m > n$, to $m-n \in \mathbb{N}$

Udowodnię tylko pierwszy fakt, pozostałe do pomyślenia, ew. na ćwiczenia.

Weźmy $m \in \mathbb{N}$ i oznaczmy przez A zbiór tych $n \in \mathbb{N}$, że $m+n \in \mathbb{N}$ ($A = \{n \in \mathbb{N} : m+n \in A\}$)
Oczywiście $1 \in A$, bo skoro $m \in \mathbb{N} = \mathcal{N}(1)$, to $m+1 \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $n \in A$, to $m+n \in \mathbb{N}$, więc i $m+n+1 \in \mathbb{N}$, co dowodzi, że $n+1 \in A$. Oznacza to, że $A = \mathbb{N}$.
(czyli wszystkie $n \in \mathbb{N}$ spełniają tezę).

Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ (zahl) definiujemy jako najmniejszy podzbiór $\mathbb{R}$ spełniający warunki
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- jeżeli $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$, to $x-y \in \mathbb{Z}$

Łatwo można wykazać, że $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$
Dowodzi się to następująco (szkic):
- $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = A$ spełnia powyższe 2 warunki
- $(\mathbb{N} \subset A,\ x, y \in A \Rightarrow x-y \in A) \Rightarrow \mathbb{Z} \subset A$
- każdy element z A można przedstawić jako różnicę

dwóch liczb naturalnych, więc $A \subset \mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} \subset A$, $A \subset \mathbb{Z} \Rightarrow A = \mathbb{Z}$.

Definicja Zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (quotient) nazywamy najmniejszy podzbiór $\mathbb{R}$ spełniający

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ $\Downarrow$ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Suma, iloczyn, różnica liczb wymiernych jest liczbą wymierną (dowód pominiemy). Iloraz $\frac{a}{b}$, o ile $b \neq 0$, liczb wymiernych a, b jest, z definicji $\mathbb{Q}$, liczbą wymierną.

Zasada indukcji (metoda dowodzenia twierdzeń).

~~Jeżeli~~ Przez $T(k)$ oznaczmy pewne twierdzenie mówiące o liczbie k. (prawdziwe, lub nie). Jeżeli udowodnimy prawdziwość $T(m)$ dla pewnego m oraz wykażemy, że z prawdziwości $T(k)$ wynika, dla $k \geq m$, prawdziwość $T(k+1)$, to wykażemy tym samym prawdziwość $T(k)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}(m)$.

Oznaczmy bowiem $A = \{k \in \mathbb{N}(m) : T(k) \text{ jest prawdziwe}\}$.

wykazaliśmy, że
- $m \in A$
- jeżeli $k \in A$, to $k+1 \in A$

a to oznacza, że $A = \mathbb{N}(\mathbb{N})$.

Def. potęgi:
dla $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$
$a^0 = 1$
$a^{n+1} = a^n \cdot a$

$0^n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$

Przykład: <u>nierówność Bernoulliego</u>

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \ \forall_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > -1}} \quad (1+a)^n \geq 1+na$$

$$T(n): \quad \forall_{\substack{a > -1 \\ a \in \mathbb{R}}} \quad (1+a)^n \geq 1+na$$

① czy zachodzi $T(1)$?

$$(1+a)^1 \overset{?}{\geq} 1+a$$

tak, bo obie strony są równe.

② załóżmy, że zachodzi $T(n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

ZAŁ. INDUKCYJNE

③ Korzystając z założenia ② próbujemy wykazać prawdziwość twierdzenia $T(n+1)$:

czy $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$?

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot \underbrace{(1+a)}_{\text{to jest } >0}$$

$(1+a)^n \geq 1+na$, nierówność można pomnożyć stronami przez liczbę dodatnią $1+a$.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na)(1+a) =$$

$$= 1+(n+1)a + \underbrace{na^2}_{\text{to jest } \geq 0} \geq 1+(n+1)a$$

czyli

$$T(n+1): \quad (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a.$$

KROK INDUKCYJNY

15

Nierówność Bernoulliego pozwala nam łatwo szacować (co ciekawe - zarówno z góry, jak i z dołu - ilustracja niebawem) różne wyrażenia zawierające potęgi. My skorzystamy z niej, by dowieść twierdzenie o ~~4~~ istnieniu pierwiastków:

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej k istnieje dokładnie jedno $b \in \mathbb{R}$ takie, że $b^k = a$, $b \geq 0$.

Dowód: ~~Oznaczmy przez A zbiór~~ ~~$\{x \in \mathbb{R} : x^k < a$~~

Na początek zauważmy, że jeżeli $a = 0$, to $b = 0$ jest rozwiązaniem (to, że jedynym, wykażemy ~~p~~ ~~nastę~~ później). Możemy zatem ograniczyć się do $a > 0$.

Oznaczmy $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^k < a\}$.

Wykażemy, że zbiór A jest a) niepusty
b) ograniczony z góry.

a) A jest niepusty, gdyż $\frac{a}{a+1} \in A$

$\left(\frac{a}{a+1}\right)^k < 1^{k-1} \cdot \frac{a}{a+1} < a$,

$0 < \frac{a}{a+1}$.

b) wykażemy, że $1+a$ jest ogr. górnym A.
Jeżeli bowiem $x \geq 1+a$, to

$$x^k \geq (1+a)^k \geq 1+ka \geq 1+a > a$$

więc $\forall_{x\in A} \; x < 1+a$.
Zbiór A ma zatem kres górny, oznaczmy go przez b: $\quad b = \sup A$.

Wykażemy teraz, że $b^k = a$.
(Dowód nie wprost) - załóżmy, że $b^k \neq a$ }, wówczas albo a) $b^k < a$
albo b) $b^k > a$.

~~Jeżeli~~ Przyjmijmy najpierw, że zachodzi przypadek a): $b^k < a$. Wykażemy wówczas, że dla dost. małego $\varepsilon > 0$ ~~ki~~ mamy $(b+\varepsilon)^k < a$, a więc $b+\varepsilon \in A$, co kłóci się z faktem, że $b = \sup A$. - będziemy mieli potrzebną sprzeczność.

Zauważmy, że $(b+\varepsilon)^k = b^k\left(1+\frac{\varepsilon}{b}\right)^k = b^k \cdot \dfrac{1}{\left(\frac{b}{b+\varepsilon}\right)^k} =$

$$= b^k \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon}{b+\varepsilon}\right)^k} \overset{\text{n. B.}}{\leq} b^k \frac{1}{1-\frac{k\varepsilon}{b+\varepsilon}} = (*)$$

jeżeli $\varepsilon, b > 0$, to to jest < 1

$$\boxed{(1+x)^k, \; x \geq -1}$$

pod warunkiem, że ε na tyle małe, by to wciąż było >0

$$1 - \frac{k\varepsilon}{b+\varepsilon} > 0$$
$$\Longleftrightarrow b+\varepsilon > k\varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow b > (k-1)\varepsilon$$

spełnione zawsze dla $k=1$

$k>1$, to $\quad \varepsilon < \dfrac{b}{k-1}$.

Jeżeli dla dost. małych $\varepsilon > 0$ mamy $(*) < a$, to z przechodniości $(b+\varepsilon)^k < a$.

$$b^k \cdot \frac{1}{1-\frac{k\varepsilon}{b+\varepsilon}} < a$$

$$\Updownarrow$$

$$b^k \frac{b+\varepsilon}{\underbrace{b-(k-1)\varepsilon}_{>0}} < a \iff (b+\varepsilon) < \frac{a}{b^k}\left(b-(k-1)\varepsilon\right)$$

(o ile $\varepsilon < \frac{b}{k-1}$ lub gdy $k=1$)

$$\iff \varepsilon \frac{b^k+(k-1)a}{b^k} < \frac{a}{b^{k-1}} - b$$

$$\iff \varepsilon < \frac{b(a-b^k)}{b^k+(k-1)a}.$$ Jeżeli więc

$\boxed{\text{dla } k \neq 1}$ $\varepsilon < \min\left(\frac{b}{k-1}, \frac{b(a-b^k)}{b^k+(k-1)a}\right)$

~~to $(b+\varepsilon)^k$~~

$\boxed{\text{dla } k = 1}$ $\varepsilon < \frac{b(a-b^k)}{b^k+(k-1)a} = \frac{b(a-b)}{b} = a-b$

to $(b+\varepsilon)^k < a$. ↯

Przypadek b): $b^k > a$

Łatwiejszy, bo używamy n.B. w drugą stronę.

$$(b-\varepsilon)^k = b^k\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{o ile } \varepsilon < b}}{\leq} b^k\left(1-\frac{k\varepsilon}{b}\right) = b^{k-1}(b-k\varepsilon).$$

Kiedy $(b-\varepsilon)^k > a$?

$$\iff b^k - b^{k-1}k\varepsilon > a \iff \boxed{\varepsilon < \frac{b^k-a}{k \cdot b^{k-1}}}$$

Jeżeli tylko $\varepsilon > 0$ jest dost. małe

t.j. spełnia nierówność w ramce,

to $(b-\varepsilon)^k > a$, więc ~~b nie jest~~

$\forall_{x \in A} \quad x^k < a < (b-\varepsilon)^k$

$\Downarrow$

$x < b - \varepsilon$ czyli $b-\varepsilon$ jest ogr. górnym A

więc b nie jest sup A $\lightning$

Istnienie liczb niewymiernych

Wykażemy, że pierwiastek (kwadratowy) z liczby naturalnej n ~~jes~~ albo jest liczbą naturalną, albo nie jest liczbą wymierną ($\Leftarrow$ jest liczbą niewymierną). Najpierw - prosta definicja:

Def. Częścią całkowitą $[x]$ liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od x.

(def. ma sens dzięki zasadzie maksimum zastosowanej do liczb całkowitych; my mamy ją wykazaną tylko dla naturalnych - jak to poprawić?)

Przykłady: $[\frac{2}{3}] = 0$, $[-\frac{2}{3}] = -1$.

Twierdzenie: $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ liczba $\sqrt{n}$ albo jest naturalna, albo niewymierna.

(19)

Dowód (Dedekind?): (oczywiście nie wprost).
Teraz mógłby zapewnić znalezienie n takiego, że $\sqrt{n}$ jest wymierne, ale nie ~~całk~~ naturalne.
↖ oczywiście nieujemne.

Załóżmy więc, że znaleźliśmy takie n.

$\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, więc $0 < \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$
i jest to liczba wymierna, zatem
zbiór $K = \{k \in \mathbb{N} : k(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

jest niepusty. Ma zatem, z zasady minimum, element najmniejszy k_0.
Zauważmy teraz, że

$$0 < k_1 = k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) < k_0$$

ale $k_1(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) =$

$$= k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])^2 = k_0(n - 2\sqrt{n}[\sqrt{n}] + [\sqrt{n}]^2)$$
$$= k_0 n - 2\underbrace{k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])}_{k_1}[\sqrt{n}] - 2k_0[\sqrt{n}]^2 +$$
$$+ [\sqrt{n}]^2 \in \mathbb{Z}$$

i do tego jest > 0 $(k_1 > 0,\ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] > 0)$,
więc $k_1(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 \in K$

sprzeczność, bo $k_1 < k_0$, $k_0 = \min K$ ↯

Wniosek: Istnieją liczby niewymierne
Dowód: $\sqrt{2}$ jest albo naturalny, albo niewymierny. Jeżeli jest naturalny, to musi być > 1, bo $(x \leq 1) \Rightarrow (x^2 \leq 1)$
i < 2, bo $(x \geq 2) \Rightarrow (x^2 \geq 4)$, ale między 1 a 2

nie ma żadnej liczby naturalnej.

Umowa: z liczb ujemnych wyciągamy tylko pierwiastki nieparzystego stopnia: dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$ takiego, że nie istnieje $l \in \mathbb{N}$ spełniające $k = 2l$ (czyli k jest nieparzyste) istnieje dokładnie jedna liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $b^k = a$. Dowód (dla $a<0$, bo dla ≥ 0 już mamy) do pomyślenia, ew. na ćwiczenia.

Twierdzenie: Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ istnieje $x \in \mathbb{Q}$ takie, że $a < x < b$.

Dowód: z zasady Archimedesa $\exists_{n \in \mathbb{N}}$ t.ż. $n > \cancel{\frac{1}{b-a}}\ (b-a)^{-1}$, stąd $n^{-1} < b-a$.

Zbiór $A = \{ m \in \mathbb{Z} : mn^{-1} \leq a \}$ jest

- niepusty, bo $mn^{-1} \leq a \Leftarrow\!\Rightarrow -m \geq -an$ i z zasady Archimedesa istnieje $-m \in \mathbb{N}$.
- ograniczony z góry (przez an)

więc na mocy zasady maksimum (znów dla $\mathbb{Z}$!) istnieje $m_0 = \max A$.

$$m_0 n^{-1} \leq a$$

$$(m_0+1)n^{-1} \leq a + n^{-1} < a + (b-a) = b$$

ale $(m_0+1)n^{-1} > a$, bo $m_0 = \max A$

cyli $a < \underbrace{(m_0+1)n^{-1}}_{= x \in \mathbb{Q}} < b$.