Kilka definicji dla przypomnienia / ustalenia oznaczeń

**Def**: Ustalmy dwa punkty $x, y \in \mathbb{R}^n$. Odcinkiem $[x,y]$ nazywamy zbiór punktów postaci (160)

$\alpha x + (1-\alpha) y$, gdzie $\alpha \in [0,1]$.

Definicja ta jest zgodna z intuicją geometryczną: jeżeli przez $\vec{v}$ oznaczymy wektor $y-x$, to

$\alpha x + (1-\alpha) y = x + (1-\alpha)\vec{v}$ ; dla $\alpha = 1$ otrzymujemy $x$,
dla $\alpha = 0$ $y$
dla $\alpha = \frac{1}{2}$ $\frac{x+y}{2}$.

Można też sprawdzić, że $d(x, \alpha x + (1-\alpha) y) + d(\alpha x + (1-\alpha) y, y) =$
odległość euklidesowa
$= d(x,y)$, więc przez punkt $\alpha x + (1-\alpha) y$ biegnie najkrótsza droga łącząca $x$ z $y$.

**Def**: Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym, gdy $\forall_{x,y \in A}$ $[x,y] \subset A$.

Wypukłe są: cała przestrzeń, zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ dla } i=1,\dots,n\}$, kula domknięta, kula otwarta, półkula, kwadrat, czworościan. Łatwo można sprawdzić (zadanko), że część wspólna dowolnie wielu zbiorów wypukłych jest wypukła. Wypukłe podzbiory prostej to cała prosta, półproste (otwarte i domknięte) i odcinki (otwarte, otwarto-domknięte i domknięte) oraz zbiory jednopunktowe i zbiór pusty.

<u>Def</u>: Mówimy, że funkcja $f$ określona na zbiorze wypukłym $A$ jest <u>funkcją wypukłą</u>, gdy

$$\forall_{x,y\in A} \ \forall_{\alpha\in[0,1]} \ f(\alpha x+(1-\alpha)y) \underset{(*)}{\leq} \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

Jeżeli w powyższej nierówności równość zachodzi tylko w oczywistych przypadkach - , gdy $\alpha\in\{0,1\}$ lub gdy $x=y$, to mówimy, że $f$ jest <u>ściśle wypukła</u> na $A$.

Jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła, to mówimy, że $f$ jest <u>wklęsła</u>; jeżeli $-f$ jest ściśle wypukła, to $f$ jest <u>ściśle wklęsła</u>. Dla funkcji wklęsłych nierówność $(*)$ zachodzi w przeciwną stronę.

<u>Przykłady funkcji wypukłych i wklęsłych</u>

① $f(x)=ax+b$, to $\forall_{\alpha,x,y} \ f(\alpha x+(1-\alpha)y) \underset{\uparrow}{=} \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$,

proszę sprawdzić!

więc $f$ jest równocześnie wklęsła i wypukła, (na $\mathbb{R}$) nie jest ściśle wypukła ani ściśle wklęsła.

② $f(x)=x^2$ jest ściśle wypukła na $\mathbb{R}$.

Mamy bowiem

$$(\alpha x+(1-\alpha)y)^2 \leq \alpha x^2+(1-\alpha)y^2$$

$$\iff \alpha x^2+(1-\alpha)y^2-(\alpha x+(1-\alpha)y)^2 \geq 0$$

$$\iff \alpha(1-\alpha)x^2-2\alpha(1-\alpha)xy+\alpha(1-\alpha)y^2 \geq 0$$

$$\iff \alpha(1-\alpha)(x-y)^2 \geq 0 \iff \alpha\in[0,1]$$

i równość zachodzi tylko wtedy, gdy $\alpha=0 \vee \alpha=1 \vee x=y$.

③ $f(x)=\sqrt{x}$ jest ściśle wklęsła na $[0,\infty)$: 

z ② wiemy, że $\forall_{v,w}\ (\alpha v+(1-\alpha)w)^2 \le \alpha v^2+(1-\alpha)w^2$

i równość zachodzi tylko, gdy $\alpha\in\{0,1\}$ lub $v=w$.

Wstawmy w tę nierówność $v=\sqrt{x}$, $w=\sqrt{y}$ dla $x,y\geq 0$

$$\left(\alpha\sqrt{x}+(1-\alpha)\sqrt{y}\right)^2 \le \alpha x+(1-\alpha)y \qquad x,y\geq 0$$

i równość tylko, gdy $\alpha\in\{0,1\}$ lub $\sqrt{x}=\sqrt{y} \Leftrightarrow x=y$

$$\Downarrow$$

$$\alpha\sqrt{x}+(1-\alpha)\sqrt{y} \geq \sqrt{\alpha x+(1-\alpha)y}$$

i równość ...

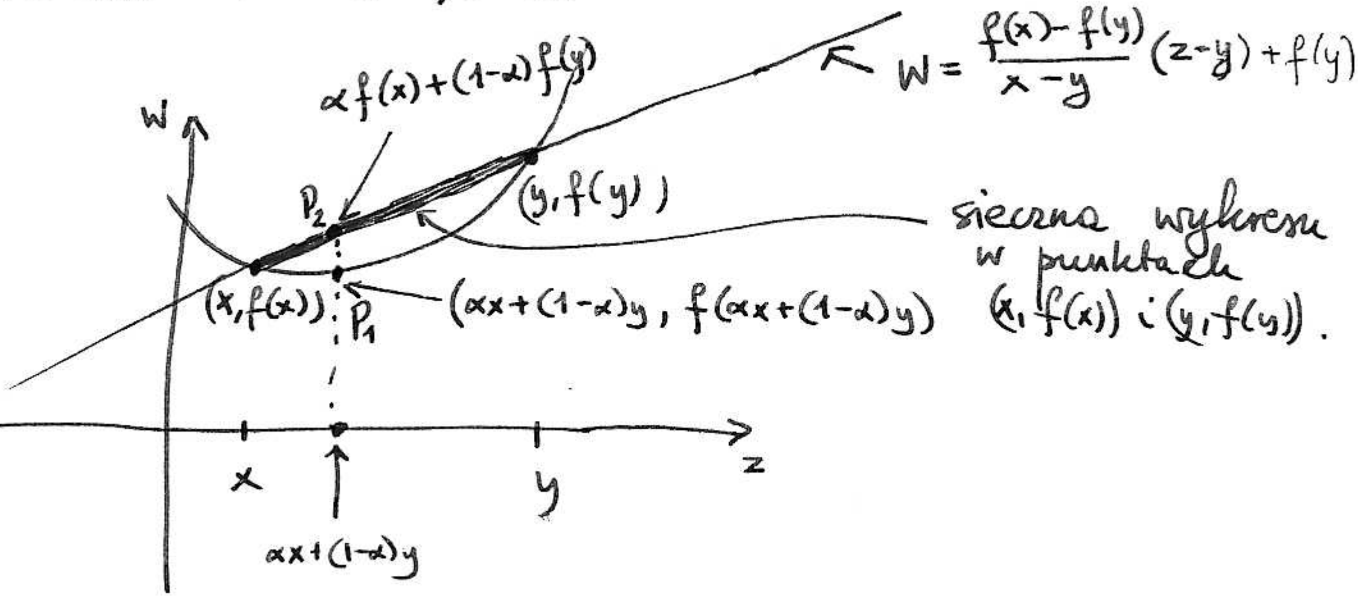
Tak więc $f(x)=\sqrt{x}$ spełnia nierówność (*) w przeciwną stronę niż funkcja ściśle wypukła – jest więc ściśle wklęsła.

Dla funkcji liniowych czy kwadratowych łatwo możemy sprawdzić, czy zachodzi warunek (*) – mają one dość szczególne własności algebraiczne. Przy badaniu bardziej złożonych funkcji przydatne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie: Funkcja ciągła na zbiorze wypukłym $A$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x,y\in A}\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Założenie ciągłości jest konieczne, choć konstrukcja kontrprzykładu jest dość wymyślna i wymaga pewnika wyboru → innym razem. Na razie udowodnimy to twierdzenie, wcześniej jednak przyjrzyjmy się geometrycznej interpretacji wypukłości i wklęsłości




Łatwo można sprawdzić, że prosta przechodząca przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ ma wzór

$$w = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(z-y)+f(y);$$ gdy pod $z$ podstawimy $\alpha x+(1-\alpha)y$, otrzymamy

$$w = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(\alpha x+(1-\alpha)y-y)+f(y) = \frac{f(x)-f(y)}{\cancel{x-y}}\cdot\alpha\cancel{(x-y)}+f(y)$$

$= \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$. Funkcja $f$ jest wypukła, gdy $\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \geq f(\alpha x+(1-\alpha)y)$, a więc gdy punkt $P_1$ leży poniżej punktu $P_2$.

<u>Wniosek:</u> Funkcja $f$ jest wypukła na przedziale (półprostej, prostej) $I$, gdy dla każdych $x, y \in I$

Sieczna wykresu $f$ poprowadzona przez $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ leży, pomiędzy $x$ a $y$, nad lub na wykresie funkcji. Jeżeli $f$ jest ściśle wypukła, to sieczna ta leży, z wyjątkiem swoich końców, w całości ponad wykresem funkcji. Dla funkcji wklęsłych jest odwrotnie – sieczna leży pod wykresem funkcji.

Zadanko: Wywnioskować stąd, że

$$(f \text{ wypukła na } A) \iff \left(\text{zbiór } \{(x,y)\in A\times\mathbb{R} : y \geq f(x)\} \text{ jest wypukły}\right)$$

Dowód twierdzenia:

Załóżmy, że funkcja $f$ spełnia na zbiorze wypukłym $A$ warunek $\forall_{x,y\in A}\ f(\cancel{x}\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ i że $f$ jest na $A$ ciągła. Wykażemy najpierw, że $f$ spełnia nierówność $\forall_{x,y\in A}\ f(\alpha x+(1-\alpha)y) \overset{(*)}{\leq} \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$ dla $\alpha = \frac{1}{4}$, $(1-\alpha)=\frac{3}{4}$.

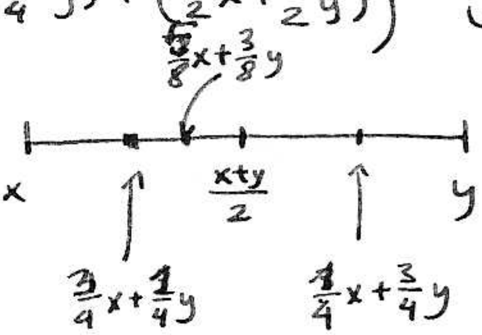
$$f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right) = f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{2}f(y) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)\right] + \frac{1}{2}f(y) = \frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$

Analogicznie dla $\alpha = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{x+y}{2}\right)$.

Dla $\alpha=\frac{1}{8}$ $\quad \frac{1}{8}x+\frac{7}{8}y = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right)+y\right)$ i korzystamy z

$\alpha = \frac{3}{8}$ $\quad \frac{3}{8}x+\frac{5}{8}y = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right)+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\right)$ itd.

W ten sposób możemy wykazać $(*)$ dla dowolnego $\alpha$ postaci $\frac{n}{2^k}$, $n=0,1,\dots,2^k$.



Dowolny punkt odcinka $[x,y]$ możemy przybliżyć punktami postaci $\frac{n}{2^n}x + \frac{2^n-n}{2^n}y$ (bo dowolną $\alpha\in[0,1]$ możemy przybliżać liczbami postaci $\frac{n}{2^k}$).
Weźmy ciąg $\alpha_m \to \alpha$, $\alpha_m\in[0,1)$, $\alpha_m = \frac{n_m}{2^{k_m}}$

Wówczas

$$\begin{array}{ccc} f(\alpha_m x+(1-\alpha_m)y) & \le & \alpha_m f(x)+(1-\alpha_m)f(y) \\ \big\downarrow{\scriptstyle m\to\infty} & & \big\downarrow \\ f(\alpha x+(1-\alpha)y) & & \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \end{array}$$

Nierówność na ciągach przenosi się na granice, zatem

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

<u>Uwaga:</u> Czy jeżeli $\underset{\substack{x,y\\ x\neq y}}{\forall}\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \underset{(**)}{<} \frac{f(x)+f(y)}{2}$,

to $f$ jest ściśle wypukła? (oczywiście wciąż przy założeniu ciągłości)

TAK. Załóżmy bowiem, że funkcja $f$ nie jest ściśle wypukła, tj. dla pewnego $\alpha\in(0,1)$ i $x\neq y$

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)=\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),$$

ale $(**)$ zachodzi dla dowolnych $x,y\in A$.

Wówczas

$$f\left(\frac{(\alpha x+(1-\alpha)y)+x}{2}\right) < \frac{f(\alpha x+(1-\alpha)y)+f(x)}{2} = \frac12(1+\alpha)f(x)+\frac12(1-\alpha)f(y)$$

$$\overset{\shortparallel}{f\left(\tfrac12(\alpha+1)x+\tfrac12(1-\alpha)y\right)}.$$

Z drugiej strony mamy, dla $\beta\in[0,1]$,

$$f\left(\beta\left[\tfrac12(\alpha+1)x+\tfrac12(1-\alpha)y\right]+(1-\beta)y\right) \le \beta f\left(\tfrac12(\alpha+1)x+\tfrac12(1-\alpha)y\right) + (1-\beta)f(y).$$

Kładąc $\beta = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$, $1-\beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ mamy

$$\underbrace{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}_{\beta}\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+1)x + \tfrac{1}{2}(1-\alpha)y\right] + \underbrace{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}_{1-\beta}y = \alpha x + (1-\alpha)y$$

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \underset{\text{z zał.}}{=} f(\alpha x + (1-\alpha)y) = f\left(\beta\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+1)x + \tfrac{1}{2}(1-\alpha)y\right] + (1-\beta)y\right)$$

$$\le \beta f\left(\tfrac{1}{2}(\alpha+1)x + \tfrac{1}{2}(1-\alpha)y\right) + (1-\beta)f(y)$$

z udowodnionej już wypukłości $f$

$$< \beta\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+1)f(x) + \tfrac{1}{2}(1-\alpha)f(y)\right] + (1-\beta)f(y)$$

wstawiamy $\beta = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$ i od razu otrzymujemy

$$= \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

↯ sprzeczność!

Kolejne przykłady funkcji wypukłych i wklęsłych: 

4. $f(x) = e^x$ jest ściśle wypukła na $\mathbb{R}$

wykażemy, że $\forall_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \quad e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^y$

$$\Updownarrow$$

$$\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{y}{2}}\right)^2 = e^x + e^y - 2e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{y}{2}} > 0$$

prawda, gdy $x \neq y$.

5. $f(x) = \ln x$ jest ściśle wklęsła na $(0, \infty)$;

wystarczy zlogarytmować nierówność dla $e^x$:

$$\frac{x+y}{2} < \ln\left(\frac{e^x + e^y}{2}\right) \qquad \text{dla } x \neq y$$

Kładąc $u = e^x$, $v = e^y$ mamy

$$\frac{\ln u + \ln v}{2} < \ln\left(\frac{u+v}{2}\right), \text{ lub równoważnie}$$

$$\frac{(-\ln u) + (-\ln v)}{2} > -\ln\left(\frac{u+v}{2}\right). \quad \text{dla } u \neq v$$

Funkcja $-\ln x$ jest więc ściśle wypukła

$\iff f(x)$ jest ściśle wklęsła.

6. $\sin x$ jest ściśle wklęsły na $[0, \pi]$

$$\frac{1}{2}\left(\sin x + \sin y\right) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} < \sin\frac{x+y}{2}.$$

$\frac{x+y}{2} \in (0, \pi)$, więc $\sin\frac{x+y}{2} \in [0,1]$

$\frac{x-y}{2} \in$ ~~$[0, \frac{\pi}{2}]$~~ $[-\frac{\pi}{2}, 0)$, więc $\cos\frac{x-y}{2} \in [0, 1)$

Twierdzenie (nierówność Jensena)

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1925)
Duński inżynier i matematyk-amator, wybitny specjalista w dziedzinie telekomunikacji (szef działu technicznego w kopenhaskim przedsiębiorstwie telefonicznym). Zajmował się m. in. analizą zespoloną; znany głównie z podanej tu w nieco prostszej formie nierówności.

Niech $f$ będzie funkcją wypukłą na zbiorze $A$.
Wówczas dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in A$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, spełniających

- $\forall_i \ \alpha_i \geq 0$
- $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$

$\left( \Rightarrow \alpha_i \in [0,1] \right)$

zachodzi nierówność

$$f(\underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}_{\substack{\text{kombinacja wypukła} \\ \text{punktów } x_1, \ldots, x_n \text{ o współcz.} \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n}}) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Jeżeli funkcja $f$ jest ściśle wypukła, to w powyższej nierówności równość zachodzi ~~tylko wte~~ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:

a) $\cancel{x_1 = x_2 = \ldots = x_n}$ wszystkie $x_i$ takie, że $\alpha_i \neq 0$, są sobie równe.

lub

b) $\exists_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} \ \alpha_i = 1$ (wtedy oczywiście $\alpha_j = 0$ dla $j \neq i$).

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji wklęsłych, ale odwraca się wówczas kierunek nierówności; równość dla funkcji ściśle wklęsłych ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek a) lub b).

# Dowód nierówności Jensena

Dowód będzie indukcyjny. Zauważmy, że dla $n=1$ nierówność (a dokładniej – w tym przypadku – równość) jest oczywista, dla $n=2$ natomiast jest to po prostu definicja wypukłości funkcji $f$ (skoro $\alpha_1+\alpha_2=1$, to $\alpha_2=1-\alpha_1$).

Załóżmy teraz, że twierdzenie zachodzi dla pewnego $n\in\mathbb{N}$ (dla $n=1$ i $n=2$ już wiemy, że tak jest), dla dowolnych $x_1,\dots,x_n\in A$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tż. $\forall_i\, \alpha_i\geq 0$
$\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$.

Wykażemy, że twierdzenie zachodzi dla $n+1$.
Będzie nam do tego potrzebny prosty lemat:

<u>Lemat</u>: Jeżeli $A$ jest wypukły, $x_1,\dots,x_n\in A$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\geq 0$
$\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$, to również $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n\in A$.

Lemat ten jest potrzebny, by sformułowanie twierdzenia miało sens – funkcja $f$ jest określona na zbiorze $A$, a my obliczamy jej wartość w punkcie $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$, nie mając (bez lematu) gwarancji, że punkt ten należy do dziedziny $f$.
Dla $n=1$ lemat jest oczywisty, niezależnie od tego, czy $A$ jest wypukły, czy nie. Dla $n=2$ jest to definicja wypukłości zbioru $A$. Krok indukcyjny dowodu dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ jest tak podobny do kroku dowodu nier. Jensena, że udowodnimy lemat i twierdzenie równocześnie.

Dowodzimy twierdzenia (i lematu) dla $n+1$, zakładając ich prawdziwość dla $n$. Mamy zatem dane $x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\in A$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\geq 0$, $\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1}=1$

Jeżeli $\alpha_{n+1}=1$, to pozostałe $\alpha_i=0$ i zarówno lemat jak i twierdzenie są oczywiste, możemy więc założyć, że $\alpha_{n+1}<1$. Przekształcimy teraz $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_{n+1}x_{n+1}$ do wygodniejszej postaci:

$$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}=\Big[\overbrace{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{n+1}}}^{=\beta_1}x_1+\overbrace{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_{n+1}}}^{=\beta_2}x_2+\dots+\overbrace{\frac{\alpha_n}{1-\alpha_{n+1}}}^{=\beta_n}x_n\Big](1-\alpha_{n+1})$$
$$+\alpha_{n+1}x_{n+1}=z(1-\alpha_{n+1})+\alpha_{n+1}x_{n+1}$$

łatwo sprawdzić, że $\beta_1+\dots+\beta_n=1$; oczywiście $\forall_i\ \beta_i\geq 0$, więc z założeń indukcyjnych

$$z=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\dots+\beta_nx_n\in A$$
$$f(z)=f(\beta_1x_1+\dots+\beta_nx_n)\overset{(*)}{\leq}\beta_1f(x_1)+\dots+\beta_nf(x_n)$$

z wypukłości zbioru $A$ wiemy teraz, że

$$(1-\alpha_{n+1})\underset{A}{\underset{\Uparrow}{z}}+\alpha_{n+1}\underset{A}{\underset{\Uparrow}{x_{n+1}}}$$ należy do $A$ ← wykonaliśmy krok indukcyjny w dowodzie lematu

a z wypukłości funkcji $f$

$$f((1-\alpha_{n+1})z+\alpha_{n+1}x_{n+1})\overset{①}{\leq}(1-\alpha_{n+1})f(z)+\alpha_{n+1}x_{n+1}$$
$$(**)\qquad \underset{②}{\overset{z\,(*)}{\leq}}(1-\alpha_{n+1})\big[\beta_1f(x_1)+\dots+\beta_nf(x_n)\big]+\alpha_{n+1}x_{n+1}$$
$$=\alpha_1f(x_1)+\dots+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})$$

Zastanówmy się teraz, kiedy w powyższej nierówności może zajść równość, jeżeli $f$ jest ściśle wypukła.

w ①: gdy $\alpha_{n+1}=0$ (bo $=1$ nie może być)

lub gdy $z=x_{n+1}$

w ②, z zał. indukcyjnego, ~~…~~ jeżeli

któraś z $\beta_i$ jest $=1$, a pozostałe $0$

lub wszystkie $x_i$ takie, że $\beta_i \neq 0$ są sobie równe.

Żeby w nier. Jensena (**) zaszła równość, musi zajść równocześnie w ① i w ②. Rozważmy przypadki:

I $\alpha_{n+1}=0$, któraś z $\beta_i = 1$, pozostałe $=0$.

$\frac{\alpha_j}{1-\alpha_{n+1}} = \beta_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$ dla $j \neq i$

$= 1 \qquad \alpha_i = 1.$

Czyli wtedy któraś z $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ jest $=1$, a pozostałe są $=0$.

II $\alpha_{n+1}=0$, wszystkie $x_j$ tż. $\beta_j \neq 0$ są sobie równe

$\Leftrightarrow$ wszystkie $x_j$ tż $\alpha_j \neq 0$ są sobie równe.

III $z = x_{n+1}$, $\underbrace{\text{któraś z } \beta_i = 1, \text{ a pozostałe } 0}$.

$x_{n+1} = z = \cancel{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{n+1}} x_1 + \dots} \ \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = \beta_i x_i = x_i$

i wszystkie $x_j$ takie, że ~~j~~ $\alpha_j \neq 0$ są sobie równe

(bo $\beta_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0$ dla $j = 1, \dots, n$).

IV $z = x_{n+1}$, $\underbrace{\text{wszystkie } x_i \text{ takie, że } \beta_i \neq 0 \text{ są sobie równe.}}$

wtedy $z$ jest równe tej wspólnej wartości $x$-ów i $x_{n+1}$ też jest jej równe, zatem

wszystkie $x_j$ tż. $\alpha_j \neq 0$ są sobie równe.

Przykład zastosowania nier. Jensena:
kolejny dowód nierówności między średnimi

$\ln x = \log x$ jest ściśle wklęsły na $[0,\infty)$.

$x_i \geq 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum \alpha_i = 1$

$$\log(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 \log x_1 + \dots + \alpha_n \log x_n$$

Weźmy $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ (wtedy oczywiście $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$)

$$\log \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} =$$

$$= \frac{\log(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)}{n} = \log \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

log jest funkcją rosnącą $\Rightarrow$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Równość tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Inna ważna nierówność: <u>nierówność Younga</u>:

$a, b \geq 0$, $p, q > 0$ tż. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dowód: nierówność Jensena (dla $n=2$, więc w zasadzie def. wklęsłości) dla ~~log~~, ln

przy $x_1 = a^p$ $x_2 = b^q$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b$$
$$= \ln ab$$

$\Rightarrow ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. Kiedy równość? $a = b$.

I jeszcze 2 twierdzenia o funkcjach wypukłych, których dowody – już po feriach.

<u>Lemat</u> (o ilorazach różnicowych):
Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą.
Wówczas iloraz różnicowy

$$I_f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$ jest niemalejącą

funkcją zmiennej $x$ na $[a,b] \setminus \{y\}$
i niemalejącą funkcją zmiennej $y$ na $[a,b] \setminus \{x\}$.

i wniosek:

<u>Twierdzenie</u>: Funkcja wypukła określona na przedziale otwartym jest na tym przedziale ciągła.

<u>Uwaga</u>: Na przedziale domkniętym tak być nie musi, np

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

jest wypukła na $[0,1]$, a w 1 oczywiście nie jest ciągła.