Zadania ze złożoności Kołmogorowa i złożoności komunikacyjnej.

1. Niech $\mathrm{MAJ} : \{1, \ldots, n\}^n \times \{1, \ldots, n\}^n \to \{1, \ldots, n\}$ będzie określona jak następuje: $\mathrm{MAJ}(x, y)$ to taki element $\{1, \ldots, n\}$, który w konkatenacji ciągów x i y występuje największą liczbę razy, przy czym w razie istnienia kilku takich elementów, należy zwrócić ten największy.

   Przykładowo,
   $$\mathrm{MAJ}((1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 3, 2, 5)) = 3$$
   $$\mathrm{MAJ}((5, 2, 5, 4, 5), (2, 3, 3, 2, 5)) = 5.$$

   Udowodnić, że $D(\mathrm{MAJ}) = \Theta(n)$.

2. Niech W będzie zbiorem wszystkich liczb $x \in [0, 1]$ takich, że ich rozwinięcie binarne $x = 0.\omega$, gdzie $\omega \in \{0, 1\}^\infty$, spełnia warunek $C(\omega_{1:n}) = \mathcal{O}(\log n)$. Pokazać, że W jest zamknięty na mnożenie i pierwiastkowanie, tzn. dla $x, y \in W$ mamy $x \cdot y \in W$ i $\sqrt{x} \in W$.

3. Rozważmy, dla danej uniwersalnej maszyny Turinga U, złożoność $L_f(x)$ zdefiniowaną jak następuje:
   $$L_f(x) = \min\{|p| : H(U(p), x) \leq f(|x|)\},$$
   gdzie $f : N \to N$ jest ustaloną funkcją spełniającą $f(n) \leq n$, a H jest odległością Hamminga.

   Zadaniem jest wykazanie, że jest to sensowna miara złożoności i zbadanie jej własności oraz wskazanie jej potencjalnych zastosowań. Jest to zadanie otwarte, które ma wiele dobrych rozwiązań.

4. Rozważmy prostokątną siatkę $n \times n$. Wierzchołki sąsiadujące ze sobą w pionie są połączone krawędzią skierowaną do góry. Wierzchołki sąsiadujące w poziomie są połączone krawędzią skierowaną z prawdopodobieństwem p w lewo i z prawdopodobieństwem $1 - p$ w prawo. Pokazać, że wartość oczekiwana maksymalnej długości ścieżki w takim grafie jest co najwyżej rzędu $\mathcal{O}(n \log n)$.