Logika domniemań

ang. Default logic (Reiter)

Domniemanie:

$$\boxed{\frac{Bird(x) : \; Flies(x)}{Flies(x)}}$$

Teoria domniemań:

$$\boxed{\text{Aksjomaty} + \text{domniemania}}$$

Definicja *Domniemaniem* nazywamy wyrażenie postaci

$$\frac{A(\overline{x}) : \; B_1(\overline{x}), \ldots, B_k(\overline{x})}{C(\overline{x})}$$

gdzie $A(\overline{x}), B_1(\overline{x}), \ldots, B_k(\overline{x})$ i $C(\overline{x})$ są formułami pierwszego rzędu, a $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ jest krotką wszystkich zmiennych wolnych w nich występujących.

$A(\overline{x})$ – *warunek wstępny*;
$B_1(\overline{x}), \ldots, B_k(\overline{x})$ – *uzasadnienie*;
$C(\overline{x})$ – *konsekwencja*.

Definicja *Teoria domniemań* jest to para $T = \langle$A,D$\rangle$, gdzie A jest zbiorem zdań pierwszego rzędu, a D jest zbiorem domniemań.

Zbiór twierdzeń wyprowadzalnych z teorii domniemań T nazywamy *rozszerzeniem* T.

Rozszerzenie powinno zawierać wszystko to, co można wywnioskować z aksjomatów stosując klasyczną logikę lub domniemania.

Jeśli E jest rozszerzeniem $T = \langle$A,D$\rangle$, to:

(1) E powinno być dedukcyjnie zamknięte względem logiki klasycznej : E=Th(E);

(2) E powinno zawierać aksjomaty: A$\subseteq$E;

(3) E powinno zawierać maksymalny zbiór konkluzji, które można otrzymać stosując domniemania z D.

Zauważmy:

z (1)-(3) wynika, że rozszerzenie teorii $\langle$A,D$\rangle$ jest postaci Th(X$\cup$A), gdzie X jest zbiorem konkluzji zastosowanych domniemań z D.

Przykład

A=$\{$(1) $Basket-Player(Bill)\}$;

$$D=\left\{\frac{Basket-Player(x):\ Tall(x)}{Tall(x)},\right.$$

$$\left.\frac{Basket-Player(x):\ Nimble(x)}{Nimble(x)}\right\}.$$

E=Th($\{$(1)$, Tall(Bill), Nimble(Bill)\}$).

Dodajmy do T

(2) $\neg Tall(Bill) \vee \neg Nimble(Bill)$.

E1=Th((1),(2),$Tall(Bill)$);

E2=Th((1),(2),$Nimble(Bill)$).

Definicja
Domniemanie $A(\overline{x}):B_1(\overline{x}),\ldots,B_k(\overline{x})/C(\overline{x})$ nazywamy *otwartym* wtedy i tylko wtedy, gdy conajmniej jedno z $A(\overline{x}),B_1(\overline{x}),\ldots,B_k(\overline{x}),C(\overline{x})$ zawiera zmienną wolną; w przeciwnym przypadku nazywamy *zamkniętym*. Teoria domniemań jest *otwarta* wtt zawiera przynajmniej jedno domniemanie otwarte; w przeciwnym przypadku jest *zamknięta* .

Zamknięte teorie domniemań

Naturalne warunki, jakie należy nałożyć na rozszerzenie E teorii ⟨A,D⟩ są następujące:

(1) E=Th(E);

(2) A⊆E;

(3) E powinno zawierać maksymalny zbiór konkluzji, które można otrzymać stosując domniemania z D.

Uwaga:

Konkluzja wyprowadzalna przez zastosowanie domniemania zamkniętego jest to jego konsekwencja.

(3') E powinno zawierać konsekwencje domniemań stosowalnych z D.

Pozostaje problem formalnej specyfikacji kryterium stosowalności domniemań.

$$\frac{A:\ B_1,\ldots,B_k}{C}$$

(3'') Jeśli $(A : B_1, \ldots, B_k/C) \in$ D, $A \in$ E i $\neg B_1 \notin$ E$, \ldots, \neg B_k \notin$ E, to $C \in$ E.

Warunki domknięcia:

(1) E=Th(E);

(2) A$\subseteq$E;

(3'') Jeśli $(A : B_1, \ldots, B_k/C) \in$ D, $A \in$ E i $\neg B_1 \notin$ E$, \ldots, \neg B_k \notin$ E, to $C \in$ E.

Warunki domknięcia mówią co powinno być w rozszerzeniu, ale nie mówią czego ma nie być.

"Definicja" E jest rozszerzeniem zamkniętej teorii domniemań wtt E jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki domknięcia.

“Definicja” E jest rozszerzeniem zamkniętej teorii domniemań wtt E jest minimalnym zbiorem spełniającym warunki domknięcia.

$T = \langle \{P(a)\}, \{P(a) : Q(a)/Q(a)\} \rangle$

Zarówno

Th($\{P(a), Q(a)\}$) i Th($\{P(a), \neg Q(a)\}$)

spełniają warunki domknięcia.

Problem:

Załóżmy, że E i Γ(E) oznaczają to samo roszerzenie ⟨A,D⟩. Jak zdefiniować Γ(E) za pomocą E?

Rozwiązanie:

Niech Γ(E) będzie najmniejszym zbiorem spełniającym:

(1) Γ(E)=Th(Γ(E));

(2) A⊆ Γ(E);

(3) Jeśli $(A : B_1, \ldots, B_k/C) \in$ D, $A\in$Γ(E) i $\neg B_1 \notin$ E$, \ldots, \neg B_k \notin$ E, to $C \in$ Γ(E).

Definicja Niech $T = \langle$A,D$\rangle$ bedzie zamkniętą teorią domniemań nad L_T. Dla dowolnego zbioru zdań S$\subseteq L_T$, niech Γ(S) będzie najmniejszym zbiorem zdań z L_T spełniającym:

(1) Γ(S)=Th(Γ(S));

(2) A$\subseteq$ Γ(S);

(3) Jeśli $(A : B_1, \ldots, B_k/C) \in$ D, $A \in$Γ(S) i $\neg B_1 \notin$ S$, \ldots, \neg B_k \notin$ S, to $C \in$ Γ(S).

Zbiór zdań E$\subseteq L_T$ jest *rozszerzeniem* dla T wtt E=Γ(E).

Przykład Rozważmy ponownie:

$T = \langle \{P(a)\}, \{P(a) : Q(a)/Q(a)\}\rangle$.

T generuje dwa minimalne zbiory spełniające warunki domknięcia:

E1=Th($\{P(a), Q(a)\}$) i

E2=Th($\{P(a), \neg Q(a)\}$).

Ponieważ

Γ(E1)=Th($\{P(a), Q(a)\}$)=E1

Γ(E2)=Th($\{P(a)\}$)$\neq$ E2

więc tylko E1 jest rozszerzeniem T.

Przykład Niech T będzie teorią z pustym zbiorem aksjomatów i jednym domniemaniem

$$\frac{p}{\neg p}.$$

T nie ma rozszerzenia. Zauważmy bowiem, że jedynymi kandydatami są

E1=Th($\{\neg p\}$) i E2=Th($\{\}$).

Ponieważ

Γ(E1)=Th($\{\}$)$\neq$E1

Γ(E2)=Th($\{\neg p\}$)$\neq$E2

to ani E1 ani E2 nie jest rozszerzeniem T.

Twierdzenie Jeśli $T = \langle$A,D$\rangle$ jest zamkniętą teorią domniemań, to zbiór zdań E jest rozszerzeniem T wtt E=$\bigcup_{i=0}^{\infty}$ E$_i$, gdzie

E$_0$=A, i dla i$\geq$ 0

$$\mathsf{E}_{i+1}=\mathsf{Th}(\mathsf{E}_i) \cup \{C : (A : B_1, \ldots, B_k/C) \in \mathsf{D},$$

$$\text{gdzie } \mathsf{E}_i \vdash A \text{ i } \neg B_1, \ldots, \neg B_k \notin \mathsf{E}\}.$$

Wniosek Zamknięta teoria domniemań $\langle$A,D$\rangle$ ma sprzeczne rozszerzenie wtt A jest sprzeczny.

Twierdzenie Jeśli E i F są rozszerzeniami zamkniętej teorii domniemań i E$\subseteq$F, to E=F.

Domniemania otwarte i ich instancje

Instancja domniemania otwartego jest to wynik jednoczesnego zastąpienia wszystkich wolnych wystąpień zmiennych poprzez termy stałe.

$$\frac{Bird(cousin(Bob)) : \ Flies(cousin(Bob))}{Flies(cousin(Bob))}$$

$$\frac{Bird(x) : \ Flies(x)}{Flies(x)}$$

$$\boxed{T \quad \longrightarrow \quad \text{CLOSED(T)}}$$

Przykład Niech T składa się z:

$$Bird(Tweety) \wedge Fish(Nelly)$$

$$\frac{Bird(x) : Has-Wings(x)}{Has-Wings(x)}.$$

CLOSED(T):

$$Bird(Tweety) \wedge Fish(Nelly)$$

$$\frac{Bird(Tweety) : Has-Wings(Tweety)}{Has-Wings(Tweety)}$$

$$\frac{Bird(Nelly) : Has-Wings(Nelly)}{Has-Wings(Nelly)}.$$

Przykład Niech T składa się z:

$$Fish(Bob)$$

$$\forall x.Fish(x) \supset Fish(father(x))$$

$$\frac{Fish(x) : Swims(x)}{Swims(x)}.$$

CLOSED(T):

$$Fish(Bob)$$

$$\forall x.Fish(x) \supset Fish(father(x))$$

$$\frac{Fish(Bob) : Swims(Bob)}{Swims(Bob)}$$

$$\frac{Fish(father(Bob)) : Swims(father(Bob))}{Swims(father(Bob))}$$

etc.

Przykład Niech T składa się z:

$$\exists x.Butterfly(x)$$

$$\frac{Butterfly(x) : Brightly-Coloured(x)}{Brightly-Coloured(x)}.$$

Chcielibyśmy wywnioskować

$\exists x.Butterfly(x) \wedge Brightly-Coloured(x).$

CLOSED(T):

$$Butterfly(a)$$

$$\frac{Butterfly(a) : Brightly-Coloured(a)}{Brightly-Coloured(a)}.$$

Przykład Niech T składa się z:

$$Birthday(Bill)$$

$$\frac{: \exists x.Friend(x, Bill)}{\exists x.Friend(x, Bill)}$$

$$\frac{Birthday(y) \wedge Friend(x, y) : Gives - Gift(x, y)}{Gives - Gift(x, y)}$$

Pierwsze domniemanie zostało zastąpione przez

$$\frac{: \exists x.Friend(x, Bill)}{Friend(b, Bill)}$$

a następnie postępujemy jak poprzednio.

Definicja *Postacią Skolema* zdania A nazywamy dowolne zdanie kwantyfikowane uniwersalnie, otrzymane z koniunkcyjnej postaci normalnej A drogą skolemizacji.

Definicja *Postać Skolema* domniemania

$$\frac{A(\overline{x}) : \ B_1(\overline{x}), \ldots, B_k(\overline{x})}{C(\overline{x})}$$

otrzymuje się przez zastąpienie $C(\overline{x})$ przez dowolną postać Skolema formuły $\forall\overline{x}.C(\overline{x})$ i usunięcie kwantyfikatora $\forall\overline{x}$ z konsekwencji otrzymanego domniemania.

Definicja *Postacią Skolema* teorii domniemań T jest dowolna teoria otrzymana w wyniku zastąpienia domniemań i aksjomatów T przez ich postacie Skolema.

Definicja Niech $T = \langle$A,D$\rangle$ będzie teorią domniemań, TERMS(T) oznacza zbiór wszystkich termów stałych języka teorii T.

Definicja Niech T będzie teorią domniemań. *Zamknięciem* T, oznaczanym CLOSED(T), nazywamy dowolną teorię otrzymaną w wyniku następującej konstrukcji:

1. Jeśli T jest zamknięta, to CLOSED(T)=T. W przeciwnym przypadku:

2. Zastąp T jej postacią Skolema, $T1$.

3. Niech $T2$ będzie teorią otrzymaną z $T1$ przez zastąpienie jej domniemań otwartych ich instancjami nad zbiorem TERMS($T1$). $T2$ jest zamknięciem T.

Definicja

Niech T będzie teorią domniemań nad L_T. E jest rozszerzeniem dla T wtt E=E'$\cap L_T$ i E' jest rozszerzeniem dla CLOSED(T).

Normalne teorie domniemań

Definicja Domniemanie postaci

$$\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x})}{B(\overline{x})}$$

nazywamy *normalnym*. Teorię $\langle$A,D$\rangle$ nazywamy *normalną* wtt każde domniemanie z D jest normalne.

Twierdzenie Każda zamknięta normalna teoria domniemań ma rozszerzenie .

Twierdzenie Jeśli zamknięta normalna teoria domniemań ma różne rozszerzenia E i F, to E$\cup$F jest sprzeczne.

Przykład Rozważmy:

A={}   D=$\left\{\frac{:p}{\neg r},\frac{:r}{\neg p}\right\}$.

T ma dwa rozszerzenia.

E=Th($\{\neg r\}$)   i   F=Th($\{\neg p\}$).

Chociaż E∪F jest niesprzeczne, to $\neg p$ i $\neg r$ nie powinny być traktowane jako jednoczesne przekonania.

Twierdzenie (Semi-Monotoniczność) Niech D i D' będą zbiorami zamkniętych domniemań normalnych takich, że D'⊆D. Niech E' będzie rozszerzeniem T'=⟨A,D'⟩ i załóżmy, że T=⟨A,D⟩. To T ma rozszerzenie E takie, że E'⊆E.

Twierdzenie mówi, że żadne przekonanie wyprowadzalne z zamkniętej normalnej teorii T nie może być unieważnione przez dodanie do T nowych domniemań zamkniętych normalnych.

Problem reprezentacji

W jakim zakresie domniemania normalne są wystarczające w praktycznych zastosowaniach?

1. Bill jest usunięty ze szkoły średniej (dropout).
2. Na ogół, usunięci ze szkoły średniej są dorośli.
3. Na ogół, dorośli są pracujący.

A=$\{Dropout(Bill)\}$

D=$$\left\{\frac{Dropout(x) : Adult(x)}{Adult(x)}, \frac{Adult(x) : Employed(x)}{Employed(x)}\right\}.$$

Z teorii tej wynika, że Bill jest osobą pracującą.

$$\frac{Adult(x) : Employed(x) \wedge \neg Dropout(x)}{Employed(x)}$$

1. Bill jest 21-latkiem.

2. Każdy 21-latek jest dorosły.

3. Na ogół, dorośli są żonaci.

$$21 - Year - Old(Bill)$$

$$\forall x.21 - Year - Old(x) \supset Adult(x)$$

$$\frac{Adult(x) : Married(x)}{Married(x)}.$$

Z teorii tej wynika, że Bill jest żonaty.

$$\frac{Adult(x) : Married(x) \wedge \neg 21\text{-}Year\text{-}Old(x)}{Married(x)}$$

Sytuacja ogólna: Dana jest reguła, która w izolacji jest reprezentowana w sposób naturalny jako domniemanie normalne

$$\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x})}{B(\overline{x})}.$$

Jeśli taką regułę umieścimy w kontekście, to mogą wystąpić pewne wyjątkowe okoliczności, np. $E(\overline{x})$, które czynią ją niestosowalną. Najprostszym rozwiązaniem jest zastąpienie domniemania normalnego przez

$$\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x}) \wedge \neg E(\overline{x})}{B(\overline{x})}.$$

Definicja Domniemanie postaci

$$\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x}) \wedge C(\overline{x})}{B(\overline{x})}$$

nazywamy *semi-normalnym*. Teoria domniemań jest *semi-normalna* wtt wszystkie jej domniemania są semi-normalne. Zauważmy, że domniemanie normalne $A : B/B$ może być reprezentowane jako semi-normalne $A : B \wedge True/B$.

Semi-normalne teorie domniemań mogą nie posiadać rozszerzenia:

Niech $T = \langle\{\}$,D$\rangle$, gdzie D składa się z

d1=$\frac{: p \wedge \neg q}{\neg q}$, d2=$\frac{: q \wedge \neg r}{\neg r}$

d3=$\frac{: r \wedge \neg p}{\neg p}$.

W ogólności, teorie semi-normalne nie mają własności semi-monotoniczności:

Niech $T = \langle\{\}, : p \wedge q/q\rangle$. T ma jedno rozszerzenie:

E=Th($\{q\}$).

Dodając $: \neg p/\neg p$ do T, otrzymujemy teorię z jednym rozszerzeniem

F=Th($\{\neg p\}$).

(1) Czy teorie semi-normalne są wystarczające do pokrycia wszystkich naturalnie występujących praktycznych zastosowań?

(2) W jakim zakresie efekty otrzymane przy użyciu domniemań semi-normalnych mogą być osiągnięte w ramach normalnej reprezentacji?

Schemat translacji

(1) Zastąp domniemanie postaci

$$\text{d}=\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x})}{C(\overline{x})}$$

przez domniemanie semi-normalne

$$\text{d1}=\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x}) \wedge C(\overline{x})}{C(\overline{x})}.$$

Ten krok wydaje się być intuicyjnie zgodny, co prowadzi do następującej obserwacji:
Wyrażenia potoczne, które mogą być poprawnie wymodelowane poprzez domniemania z jednym uzasadnieniem, mogą być wyrażone przez domniemania semi-normalne.

Ważne: Domniemanie i jego tłumaczenie nie muszą być równoważne. Rozważmy d=: $p/\neg p$ i jego tłumaczenie d1=: $p \wedge \neg p/\neg p$. Teoria $\langle\{\},\{\text{d}\}\rangle$ nie ma rozszerzenia, natomiast teoria $\langle\{\},\{\text{d1}\}\rangle$ ma rozszerzenie Th($\{\}$).

(2) Zastąp domniemanie semi-normalne

$$\text{d1}=\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x}) \wedge C(\overline{x})}{C(\overline{x})}$$

przez domniemanie normalne

$$\text{d1}=\frac{A(\overline{x}) : B(\overline{x}) \wedge C(\overline{x})}{B(\overline{x}) \wedge C(\overline{x})}.$$

To działa, jeśli zaakceptujemy: "Na ogół, jeśli $A(\overline{x})$ i $C(\overline{x})$, to $B(\overline{x})$.

$$\frac{Adult(x) : Married(x) \wedge \neg 21-Year-Old(x)}{Married(x)}$$

$$\frac{Adult(x) : Married(x) \wedge \neg 21-Year-Old(x)}{Married(x) \wedge \neg 21-Year-Old(x)}$$

Oto przykład, gdzie schemat nie działa.

$$\frac{Has-Motive(x) : Guilty(x)}{Suspect(x)}$$

$$\frac{Has-Motive(x) : Guilty(x) \wedge Suspect(x)}{Suspect(x)}$$

$$\frac{Has-Motive(x) : Guilty(x) \wedge Suspect(x)}{Guilty(x) \wedge Suspect(x)}$$

Prace dotyczące logiki domniemań

- Semantyczna charakteryzacja rozszerzeń (Łukaszewicz 1985, Etherington 1987).
- Teoria dowodzenia dla DL (Reiter 1980).
- Związki pomiędzy DL i AEL (Konolige 1988, Marek & Truszczynski 1989).
- Alternatywne sformułowania logiki domniemań:
  - Łukaszewicz 1984.
  - Brewka 1991.

Konkluzje

Zalety DL:

Przejrzystość koncepcji.

Wady DL:

(1) Brak naturalnej semantyki.

(2) Brak rozszerzenia dla pewnych teorii.

(3) DL nie radzi sobie z wnioskowaniem przez przypadki.

Na przykład, mając

A=$\{bird \vee rocket\}$

D=$\left\{\dfrac{bird : flies}{flies}, \dfrac{rocket : flies}{flies}\right\}$

czujemy intuicyjnie, że $flies$ powinno być dowodliwe. Niestety, nie jest.