Logika I rzędu

1. [trzeba] Posługując się metodą rezolucji wykazać, że następująca formuła jest tautologią

$$\forall y(\forall x(P(y) \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow \forall x R(x,y)))$$

Rozwiązanie: negację formuły sprowadzamy do postaci klauzulowej CL i wyprowadzamy klauzulę pustą. Należy podkreślić, że sprowadzenie do postaci klauzulowej nie zachowuje równoważności, a jedynie spełnialność i pokazać, gdzie tę równoważność tracimy (skolemizacja; w algorytmie na wykładzie rozważane są tylko formuły zamknięte. Jeśli rozszerzymy go na otwarte, to domykamy formułę egzystencjalnie po zmiennych wolnych i ta operacja też powoduje utratę równoważności.)

2. [trzeba] Posługując się metodą rezolucji wykazać, że z formuły

   (a) $\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y(A(x) \wedge A(y) \Rightarrow Q(x,y))$
   wynika
   (b) $\exists x \forall y(A(y) \Rightarrow Q(x,y))$

   Rozw. $\neg((a) \Rightarrow (b))$ (równoważne $(a) \wedge \neg(b)$) sprowadzamy do postaci klauzulowej $CL((a) \wedge \neg(b))$ i wyprowadzamy klauzulę pustą.

3. [trzeba] Posługując się metodą rezolucji wykazać, że z formuł

   (1) $\exists x P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y = x)$
   (2) $\forall x(x = a \vee x = b)$
   (3) $a \neq b$
   (4) $P(a)$

   wynika

   (5) $\neg P(b)$.

   Rozwiązanie: Liczymy $CL((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge \neg(5))$. W języku teorii występuje symbol $=$. Musimy więc dodać aksjomaty dla równości.
   Ogólnie: CL – zbiór klauzul. Przez $EQ(CL)$ oznaczamy **zbiór aksjomatów równości dla** CL. $EQ(CL)$ zawiera następujące klauzule:

   $x = x$.

   $x \neq y \vee y = x$.

   $x \neq y \vee y \neq z \vee x = z$.

   $x_1 \neq y_1 \vee \cdots \vee x_n \neq y_n \vee \neg P(x_1, \ldots, x_n) \vee P(y_1, \ldots, y_n)$,

   dla każdego n-argumentowego ($n > 0$) symbolu predykatowego P występującego w CL. Tutaj: $x \neq y \vee \neg Px) \vee P(y)$

   $x_1 \neq y_1 \vee \cdots \vee x_n \neq y_n \vee (F(x_1, \ldots, x_n) = F(y_1, \ldots, y_n))$,

   dla każdego n-argumentowego ($n > 0$) symbolu funkcyjnego F występującego w CL. Tutaj: funkcje nie występują w języku teorii.
   Klauzulę pustą wyprowadzamy z $CL \cup EQ(CL)$.

4. [warto] Pokazać (za pomocą reguły rezolucji), że następująca formuła jest tautologią

   $$A : \neg\exists y \forall z (P(z,y) \equiv \neg\exists x (P(z,x) \wedge P(x,z))$$

   Rozwiązanie: Pokazujemy, że $\neg A$ jest niespełnialna.

   (a) Sprowadzamy $\neg A$ do postaci klauzulowej. Dostajemy:
   1. $\neg P(z1,a) \vee \neg P(z1,x1) \vee \neg P(x1,z1)$
   2. $P(z2, f(z2)) \vee P(z2,a)$
   3. $P(f(z3),z3) \vee P(z3,a)$

   Jest to przykład, że czasami binarna rezolucja nie wystarcza. Warto przy okazji zauważyć, że tego problemu nie ma w prologu, bo tam stosuje się jedynie klauzule Horn'a.

   (b) Dowód:
   (a) z klauzuli 1. bierzemy wszystkie 3 literały i drugi z klauzli 2. Postawienie unifikujące jest { a/x1, a/z1, a/z2}. Dostajemy
   4. $P(a, f(a)$
   (b) teraz bierzemy analogicznie 1. -wszystkie literały i 3. drugi literał z podstawieniem { a/x1, a/z1, a/z3}. Dostajemy
   5. $P(f(a),a)$
   (c) 1. i 5. z podstawieniem {a/x1, f(a)/z1} daje
   6. $\neg P(a, f(a))$
   (d) i teraz 4. i 6. daje
   7. $\perp$

5. [można] Problem reprezentacji. Zapisać w języku logiki I rzędu następujące zdania:

   (a) Istnieje conajmniej jeden bóg.

   (b) Istnieje conajwyżej jeden bóg.

   (c) Istnieje dokładnie jeden bóg.

   (d) Istnieje conajmniej dwóch bogów.

   (e) Istnieje conajwyżej dwóch bogów.

   (f) Istnieje dokładnie dwóch bogów.

   Rozwiązanie:

   (a) $\exists x Bóg(x)$.

   (b) $\forall x \forall y (Bóg(x) \wedge Bóg(y) \Rightarrow x = y)$

   (c) $\exists x (Bóg(x) \wedge \forall y (Bóg(y) \Rightarrow x = y))$

   (d) $\exists x \exists y (BÓg(x) \wedge Bóg(y) \wedge x \neq y)$

   (e) $\forall x \forall y \forall z (Bóg(x) \wedge BÓg(y) \wedge Bóg(z) \Rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$

   (f) $\exists x \exists y (Bóg(x) \wedge Bóg(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (Bóg(z) \Rightarrow (z = x \vee z = y)))$.